

Compléments autour de la Leçon 1

1 Préparation à l'oral

Exercice 1

1. Démontrer le principe d'inclusion-exclusion.
2. Démontrer la formule du crible :

$$\text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, I \neq \emptyset} (-1)^{\text{card}(I)-1} \text{Card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

3. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .
4. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
5. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2 [Nombre de surjections]

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}$ et F un ensemble de cardinal $m \in \mathbf{N}$. Montrer que le nombre de surjections de E dans F est donné par :

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n$$

Exercice 3 [Nombre de dérangements]

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On appelle *dérangement* de $\{1, \dots, n\}$ tout élément de \mathfrak{S}_n sans point fixe. Dénombrer les dérangements de $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 4 [Nombres eulériens]

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On dit qu'une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ présente une descente en $i \in \{2, \dots, n\}$ si $\pi(i) < \pi(i-1)$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $D_{n,k}$ l'ensemble des permutations de \mathfrak{S}_n présentant exactement $k-1$ descente et on pose $A_{n,k} = \#D_{n,k}$. Pour tout n , on pose $A_{n,0} = 0$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A_{n,1} = A_{n,n} = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$A_{n+1,k} = kA_{n,k} + (n-k+2)A_{n,k-1}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$A_{n,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

N.B. : On pourra admettre que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} (n-j)^n = 1.$$

Exercice 5 [Superstitieux]

On note u_n le nombre de listes de longueur n d'éléments de $\{0, \dots, 9\}$ ne contenant pas le motif « 13 ». Établir une relation récurrente permettant le calcul de u_n pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer le cardinal de l'ensemble \mathcal{S}_n constitué des arêtes et diagonales du polygône régulier à n cotés.

Exercice 7

Dans une promotion de 100 étudiants, 80 font de l'allemand, 40 font de l'anglais et 30 font les deux.

1. Coder ces données.
2. Combien y a-t-il d'étudiants qui font :
 - (a) de l'allemand mais pas d'anglais ?
 - (b) de l'allemand ou de l'anglais ou les deux ?
 - (c) aucune des deux langues ?
 - (d) pas d'allemand ou pas d'anglais ?
 - (e) de l'allemand ou de l'anglais mais pas les deux ?

Exercice 8

Un match oppose deux équipes, A et B , de 15 joueurs chacune. Avant le début de la rencontre, chaque joueur serre la main à chacun des joueurs de l'autre équipe. Combien y-aura-t-il de poignées de mains échangées ?

Exercice 9

Une porte est verrouillée par un digicode numérique présentant les chiffres de 0 à 9 et les lettres X, Y, Z . On sait que le code est composé de 4 caractères.

1. Combien de façons y-a-il de former un code ?
2. Même question si l'on impose que le code contienne exactement une lettre ?
3. Même question si l'on impose que le code ne contienne que des chiffres ordonnés de façon strictement décroissante ?

Exercice 10

Une porte est verrouillée par un digicode mécanique présentant les chiffres de 0 à 9 et les lettres X, Y, Z . On sait que le code est composé de 4 caractères (distincts).

1. Combien de façons y-a-il de former un code ?
2. Même question si l'on impose que le code contienne exactement une lettre ?
3. Même question si l'on impose que le code ne contienne que des chiffres ?

Exercice 11

Deux colocataires ont 11 amis.

1. De combien de manières différentes peuvent-ils en inviter 5 à dîner ?
2. Même question si deux d'entre eux ne sortent qu'ensemble.
3. Même question si deux sont en mauvais terme et ne peuvent être invités simultanément.

Exercice 12 [Tiré du sore IAE message du 02/04/2015]

À la fin d'un banquet, les 20 convives restants (10 hommes et 10 femmes) se disent au revoir de la manière suivante :

- deux hommes se serrent la main,
- deux femmes se font trois bises,
- un homme et une femme s'embrassent en se faisant deux bises.

Combien de bises va-t-il y avoir au total ?

Exercice 13 [Tiré du sore IAE message du 21/05/2015]

Un code de sécurité est formé de quatre chiffres de 0 à 9. On sait que trois des chiffres sont identiques, mais pas les quatre. Combien de codes différents vérifiant cette information sont possibles ?

Exercice 14

Un club sportif compte 34 adhérents. Combien y-a-t-il de façons de former deux équipes de 15 dans ce club ?

Exercice 15

Une course oppose 12 concurrents. Les trois premiers seront récompensés

1. Combien de choix de personnes récompensées ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

Exercice 16

Le Système d'immatriculation des véhicules (SIV) français est basé sur une séquence de deux lettres - trois chiffres - deux lettres. Les séries de trois chiffres vont de 001 à 999. Les lettres I, O et U sont exclues et les associations de lettres SS et WW sont interdites à gauche et l'association SS est interdite à droite. Déterminer le nombre de plaques minéralogiques possibles.

Exercice 17

Déterminer le nombre d'anagrammes de DIJON puis de CHENOVE.

Exercice 18

Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les lettres de BEAUNE ?

Exercice 19

On considère un jeu classique de 52 cartes, contenant 13 cartes de chaque couleur (Piques, Carreaux, Cœurs, Trèfles) dont quatre habillés par couleur (As, Roi, Dame et Valet).

1. Le jeu ayant été (correctement) mélangé, on révèle 3 cartes.
 - (a) Quelle est la probabilité pour qu'aucun habillé ne soit révélé.
 - (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un habillé soit révélé.
2. On vient de révéler les quatre cartes suivantes et une cinquième est sur le point d'être révélée.



- (a) Quelle est la probabilité pour que la cinquième carte révélée permette de former un brelan (trois cartes de même figure) ?
- (b) Quelle est la probabilité pour que la cinquième carte révélée permette de former une quinte flush (cinq cartes de même couleur et de figures consécutives) ?
- (c) Quelle est la probabilité pour que la cinquième carte révélée permette de former une couleur (cinq cartes de même couleur sans que les figures soient consécutives) ?
- (d) Quelle est la probabilité pour que la cinquième carte révélée permette de former une quinte (cinq cartes consécutives mais pas de même couleur) ?

Exercice 20

Sur le relevé d'identité bancaire RIB, figurent le nom et l'adresse du titulaire du compte ainsi qu'un identifiant composé comme suit :

- code banque : 5 chiffres ;
- code guichet : 5 chiffres ;
- numéro de compte : 11 chiffres ou lettres ;
- clé RIB : 2 chiffres obtenus, connaissant les 21 premiers caractères de l'identifiant, selon la formule :
$$97 - ([\text{concaténation de banque, guichet, compte}] \times 100 \text{ modulo } 97).$$

1. Combien de façons y-a-t-il de former un code banque ?
2. Combien de façons y-a-t-il de former un code banque avec uniquement des chiffres distincts ?
3. Combien de façons y-a-t-il de former un numéro de compte ?
4. Combien de façons y-a-t-il de former un numéro de compte ne contenant aucune fois la séquence 13 pour éviter les remarques des clients superstitieux ?

5. Proposer une version guidée de la question précédente pour la rendre accessible à un élève.
6. Un guichetier a reçu un relevé d'identité bancaire difficilement lisible suite à une mauvaise impression, le code agence a les deux derniers chiffres effacés mais il arrive à se rappeler qu'il s'agissait de deux chiffres rangés en ordre croissant (du plus petit au plus grand). Combien de possibilités existent ?

Exercice 21

Décider parmi les exercices précédents lesquels sont ou peuvent être rendus accessible à des élèves, en précisant le niveau visé, et d'une structure les regroupant par compétences ou méthodologies mobilisées.

2 Entraînement l'écrit

Rédiger la solution de la Partie B du Problème n° 2 de l'Épreuve 1 de 2012.

N.B : On pourra admettre les résultats de la Partie A.