DUT GEA 1$^{\text{e}}$ année
Mathématiques financières, S2
Année universitaire 2017/2018

CorrigÃ© du CC nº 1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = 7$.

1. Calculer u_7 et u_{32}. **(2 points)**

On a :
$$u_7 = u_0 + 7r = 12 + 7 \times 7 = 61 \quad \text{et} \quad u_{32} = u_0 + 32r = 12 + 32 \times 7 = 236.$$

2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 159$? Justifier. **(2 points)**

On a :
$$\begin{aligned} u_n = 159 &\iff 12 + 7n = 159 \\ &\iff 7n = 159 - 12 = 147 \\ &\iff n = \frac{147}{7} = 21. \end{aligned}$$
On a $u_n = 159$ pour $n = 21$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique telle que $u_5 = 17,5$ et $u_{11} = 26,5$.

1. Déterminer la raison r puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. **(3 points)**

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a :
$$6r = u_0 + 11r - (u_0 + 5r) = u_{11} - u_5 = 26,5 - 17,5 = 9$$
donc
$$r = \frac{9}{6} = 1,5.$$
On en déduit que
$$u_0 = 17,5 - 7,5 = 10$$
puisque
$$17,5 = u_5 = u_0 + 5r = u_0 + 5 \times 1,5 = u_0 + 7,5.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier. **(1 point)**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $r = 1,5 > 0$ donc (strictement) croissante.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique telle que $u_2 = \frac{16}{9}$ et $u_7 = \frac{16}{2187}$.

1. Déterminer la raison q puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. **(3 points)**

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique, on a :
$$q^5 = q^{7-2} = \frac{u_0 q^7}{u_0 q^2} = \frac{u_7}{u_2} = \frac{\frac{16}{2187}}{\frac{16}{9}} = \frac{2187}{9} = \frac{1}{243}$$
donc
$$q = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}.$$
On en déduit que $u_0 = 16$ puisque
$$\frac{16}{9} = u_2 = u_0 q^2 = u_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{u_0}{9}.$$

2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. **(1 point)**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = 7$ et de raison $q = 2$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Calculer S_3 et S_{25}. **(2 points)**

Rappelons que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ géométrique de raison q, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ici, on a $u_1 = 7 \times 2 = 14$ et donc :

$$S_3 = 14\frac{1-2^3}{1-2} = 98$$

et

$$S_{25} = 14\frac{1-2^{25}}{1-2} = 469762034.$$

2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \geq 7700$? **(2 points)**

On a :

$$\begin{aligned} u_n \geq 1500 &\iff 7 \times 2^n \geq 7700 \\ &\iff 2^n \geq \frac{7700}{7} = 1100 \\ &\iff n\ln(2) = \ln(2^n) \geq \ln(1100) \qquad \text{(par croissance de } \ln\text{)} \\ &\iff n \geq \frac{\ln(1100)}{\ln(2)} \simeq 10,10 \qquad (\text{car } \ln(2) > 0). \end{aligned}$$

On a $u_n \geq 7700$ pour tout $n \geq 11$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 9u_n - 8, \qquad n \in \mathbf{N} \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$v_n = u_n - 1.$$

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n. **(1 point)**

On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 9u_n - 8 - 1 = 9u_n - 9 = 9(u_n - 1).$$

2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 9. **(1 point)**

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{9(u_n-1)}{v_n} = \frac{9v_n}{v_n} = 9$$

ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 9.

3. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n. **(1 point)**

On a :

$$v_0 = u_0 - 1 = 12 - 1 = 11$$

et donc, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant géométrique de raison 9 :

$$v_n = v_0 9^n = 11 \times 9^n.$$

4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**(1 point)**

Puisque $v_n = u_n - 1$ par définition, on en déduit que le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donné par :

$$u_n = v_n + 1 = 11 \times 9^n + 1.$$