DUT GEA 1^e^ année
Mathématiques financières, S2
Année universitaire 2017/2018

Corrigé du CC n° 1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 23$ et de raison $r = -6$.

1. Calculer u_4 et u_{25}. **(2 points)**

> On a :
> $$u_4 = u_0 + 4r = 23 + 4 \times (-6) = -1 \quad \text{et} \quad u_{25} = u_0 + 25r = 23 + 25 \times (-6) = -127.$$

2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -67$? Justifier. **(2 points)**

> On a :
> $$\begin{aligned} u_n = -67 &\iff 23 - 6n = -67 \\ &\iff -6n = -67 - 23 = -90 \\ &\iff n = \frac{-90}{-6} = 15. \end{aligned}$$
> On a $u_n = -67$ pour $n = 15$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique telle que $u_5 = 36,5$ et $u_{11} = 27,5$.

1. Déterminer la raison r puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. **(3 points)**

> Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a :
> $$6r = u_0 + 11r - (u_0 + 5r) = u_{11} - u_5 = 27,5 - 36,5 = -9$$
> donc
> $$r = \frac{-9}{6} = -1,5.$$
> On en déduit que
> $$u_0 = 36,5 + 7,5 = 44$$
> puisque
> $$36,5 = u_5 = u_0 + 5r = u_0 + 5 \times (-1,5) = u_0 - 7,5.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier. **(1 point)**

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $r = -1,5 < 0$ donc (strictement) decroissante.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique telle que $u_2 = \frac{9}{4}$ et $u_9 = \frac{9}{512}$.

1. Déterminer la raison q puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. **(3 points)**

> Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique, on a :
> $$q^7 = q^{9-2} = \frac{u_0 q^9}{u_0 q^2} = \frac{u_9}{u_2} = \frac{\frac{9}{512}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{512} = \frac{1}{128}$$
> donc
> $$q = \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}.$$
> On en déduit que $u_0 = 9$ puisque
> $$\frac{9}{4} = u_2 = u_0 q^2 = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{u_0}{4}.$$

2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. **(1 point)**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Calculer S_3 et S_{13}. **(2 points)**

Rappelons que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ géométrique de raison q, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ici, on a $u_1 = 5 \times 3 = 15$ et donc :

$$S_3 = 15\frac{1-3^3}{1-3} = 195$$

et

$$S_{13} = 15\frac{1-3^{13}}{1-3} = 11957415.$$

2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \geq 1500$? **(2 points)**

On a :

$$\begin{aligned} u_n \geq 1500 &\iff 5 \times 3^n \geq 1500 \\ &\iff 3^n \geq \frac{1500}{5} = 300 \\ &\iff n\ln(3) = \ln(3^n) \geq \ln(300) \qquad (\text{par croissance de } \ln) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(300)}{\ln(3)} \simeq 5,19 \qquad (\text{car } \ln(3) > 0). \end{aligned}$$

On a $u_n \geq 1500$ pour tout $n \geq 6$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 3u_n + 6, \qquad n \in \mathbf{N} \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$v_n = u_n + 3.$$

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n. **(1 point)**

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 3u_n + 6 + 3 = 3u_n + 9 = 3(u_n + 3).$$

2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3. **(1 point)**

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(u_n+3)}{v_n} = \frac{3v_n}{v_n} = 3$$

ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3.

3. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n. **(1 point)**

On a :

$$v_0 = u_0 + 3 = 7 + 3 = 10$$

et donc, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant géométrique de raison 3 :

$$v_n = v_0 3^n = 10 \times 3^n.$$

4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**(1 point)**

Puisque $v_n = u_n + 3$ par définition, pn en déduit que le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donné par :

$$u_n = v_n - 3 = 10 \times 3^n - 3.$$