Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Questions de cours

1. Donner le nombre de listes ordonnées et avec répétitions possibles de longueur p (p-listes) d'éléments d'un ensemble de cardinal n.

Il s'agit de n^p.

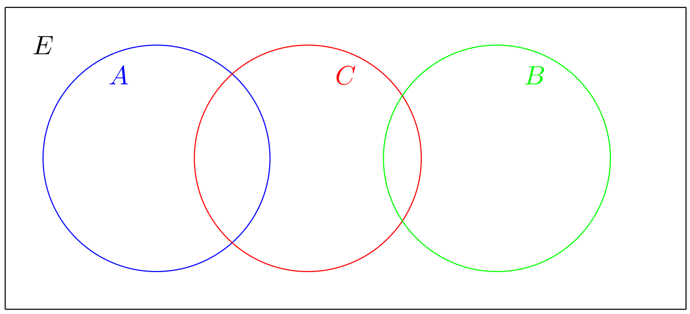
2. Donner le nombre de listes ordonnées et sans répétition de k éléments d'un ensemble de cardinal n.

Il s'agit de $\mathbf{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$ (0 sinon).

Exercice 1

Soient $A, B, C \subset E$. On sait que $\mathrm{Card}(E) = 100$, $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 80$, A et B sont disjoints, $\mathrm{Card}(\overline{A \cup C}) = 40$, $\mathrm{Card}(A) = 5$ et $\mathrm{Card}(B \cap C) = 15$.

1. Réaliser un diagramme de Venn représentant la situation.



Remarque : Il faut bien faire apparaître que A et B sont disjoints.

2. Calculer $\mathrm{Card}(A \cup C)$, $\mathrm{Card}(B \setminus C)$, $\mathrm{Card}(B)$ et $\mathrm{Card}(A \cup B)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A \cup C) &= \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{A \cup C}) = 100 - 40 = 60,\\
\mathrm{Card}(B \setminus C) &= \mathrm{Card}((A \cup B \cup C) \setminus (A \cup C)) \qquad \text{car } A \cap B = \emptyset\\
&= \mathrm{Card}((A \cup B \cup C)) - \mathrm{Card}(A \cup C) = 80 - 60 = 20,\\
\mathrm{Card}(B) &= \mathrm{Card}(B \setminus C) + \mathrm{Card}(B \cap C) = 20 + 15 = 35,\\
\mathrm{Card}(A \cup B) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = 5 + 35 = 40 \qquad \text{car } A \cap B = \emptyset.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot PEINTRE.

Pour construire un anagramme de PEINTRE, il faut et suffit de choisir les places des 2 E dans le mot de 7 lettres puis de compléter avec un liste ordonnée des 5 autres lettres (simples) aux places restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_7^2 5! = \frac{7!}{2!5!} \times 5! = 7 \times 6 \times 5 \times 3 = 2520$$

anagrammes de PEINTRE.

2. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les lettres du mot PEINTRE ?

On raisonne selon le nombre de E contenu dans le mot de 5 lettres (les autres lettres nétant pas répétées) pour former le mot. Soit le mot contient au plus un E et on choisit une liste ordonnée sans répétition de 5 lettres parmi P,E,I,N,T et R, soit le mot contient 2 E dont on choisit les places avant de compléter par une liste ordonnée sans répétition de 3 lettres parmi P,I,N,T et R aux places restantes. On peut donc former :

$$\mathbf{A}_6^5 + \mathbf{C}_5^2\mathbf{A}_5^3 = \frac{6!}{1!} + \frac{5!}{2!3!}\frac{5!}{2!} = 1320$$

mots de 5 lettres avec les lettres de PEINTRE.

Exercice 3

Un facteur d'instruments de musique attribue à chaque instrument qu'il fabrique un numéro de série de la forme :

code de modèle - nombre de trois chiffres sans 0 - code d'option.

Les codes de modèles sont 230, 240, 250 et 260 et les codes d'option sont Y, R et M selon que l'instrument soit réalisé en cuivre jaune, rose ou en maillechort.

Combien d'instruments pourra-t-il ainsi répertorier au maximum ?

Les nombres qu'il peut utiliser au centre d'un numéro de série sont au nombre de $9^3 = 729$ (nombre de 3-listes à valeurs dans $\{1, \dots, 9\}$). Il y a 4 préfixes possibles (230, 240, 250 et 260) et 3 suffixes possibles (Y,R,M). Par le principe de multiplication, il y a donc $4 \times 729 \times 3 = 8748$ numéros de série possibles.

Exercice 4

1. Combien y a-t-il de façons différentes de sélectionner deux binômes distincts et numérorés dans un groupe de 4 personnes ?

Pour sélectionner deux binômes numérotés dans un groupe de 4 personnes, il faut et suffit de sélectionner une première paire de personnes parmi les 4 (ordre pas important) pour former le premier binôme, puis une seconde paire parmi les deux restantes pour former le second. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{4!}{2^2} = 6$$

façons différentes de répartir un groupe de 4 personnes en binômes.

2. Combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de 4 personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ?

Il y a $2! = 2$ façons de numéroter les deux binômes et donc deux fois moins de façons de répartir 4 personnes en deux binômes distincts et non numérotés que de sélectionner deux binômes numérotés dans un groupe de 4 personnes. On déduit de la question précédente qu'il y a $\frac{6}{2} = 3$ façons de répartir 4 personnes en deux binômes distincts et non numérotés.

3. [**Bonus**] Combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de 8 personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ? Plus généralement, combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de $2n$ personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ?

Pour sélectionner 5 binômes dans un groupe de 10 personnes, il faut et suffit de sélectionner une première paire de personnes parmi les 10 (ordre pas important), puis une deuxième paire parmi les 8 restantes, ..., et finalement une quatrième paire parmi les deux restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_{10}^2\mathbf{C}_8^2\mathbf{C}_6^2\mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{8!}{2!6!}\frac{6!}{2!4!}\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{8!}{2^4} = 2520$$

façons différentes de répartir un groupe de 8 personnes en binômes numérotés. Puisqu'il y a $4! = 24$ numérotations possibles des binômes, on obtient qu'il y a $\frac{2520}{24} = 105$ répartitions possibles de 8 personnes en binômes (non numérotés).

Ce qui précède se généralise facilement. Pour sélectionner n binômes numérotés dans un groupe de $2n$ personnes, il faut et suffit de slectionner une première paire de personnes parmi les $2n$, puis une deuxième paire parmi les $2n-2$ restantes, ..., et finalement une n^{e} paire parmi les deux restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_{2n}^2\mathbf{C}_{2n-2}^2\ldots\mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdots\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

façons différentes de répartir un groupe de $2n$ personnes en binômes numérotés. Puisqu'il y a $n!$ numérotations possibles des binômes, on obtient qu'il y a $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ répartitions possibles de $2n$ personnes en binômes (non numérotés).