DUT GEA 1e année
Probabilités, S2

Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Questions de cours

1. Donner le nombre de façons d'ordonner les éléments d'un ensemble de cardinal n (nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n).

> Il s'agit de $n!$.

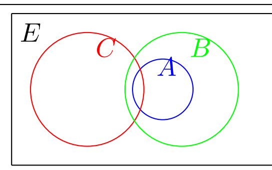
2. Donner le nombre de sous-ensembles à k éléments (sans ordre ni répétition) d'un ensemble de cardinal n.

> Il s'agit de $\mathbf{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$ (0 sinon).

Exercice 1

Soient $A, B, C \subset E$. On sait que $\text{Card}(E) = 200$, $\text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = 70$, A est inclus dans B, $\text{Card}(B \cap C) = 10$, $\text{Card}(A) = 5$ et $\text{Card}(B \setminus A) = 35$.

1. Réaliser un diagramme de Venn représentant la situation.



> **Remarque :** Il faut bien faire apparaître que A est inclus dans B.

2. Calculer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$, $\text{Card}(B \cup C)$, $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(C)$.

> On a :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = 200 - 70 = 130, \\
\text{Card}(B \cup C) &= \text{Card}(A \cup B \cup C) = 130 \qquad \text{car } A \subset B, \\
\text{Card}(B) &= \text{Card}(B \setminus A) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(B \setminus A) + \text{Card}(A) = 35 + 5 = 40 \qquad \text{car } A \subset B, \\
\text{Card}(C) &= \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(B) + \text{Card}(B \cap C) = 130 - 40 + 10 = 100.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot SCULPTEUR.

> Pour construire un anagramme de SCULPTEUR, il faut et suffit de choisir les places des 2 U dans le mot de 9 lettres puis de compléter avec un liste ordonnée des 7 autres lettres (simples) aux places restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_9^2 7! = \frac{9!}{2!7!} \times 7! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 = 181440$$

> anagrammes de SCULPTEUR.

2. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les lettres du mot SCULPTEUR ?

> On raisonne selon le nombre de U contenu dans le mot de 5 lettres (les autres lettres nétant pas répétées) pour former le mot. Soit le mot contient au plus un U et on choisit une liste ordonnée sans répétition de 5 lettres parmi S,C,U,L,P,T,E et R, soit le mot contient 2 U dont on choisit les places avant de compléter par une liste ordonnée sans répétition de 3 lettres parmi S,C,L,P,T,E et R aux places restantes. On peut donc former :

$$\mathbf{A}_8^5 + \mathbf{C}_5^2 \mathbf{A}_7^3 = \frac{8!}{3!} + \frac{5!}{2!3!} \frac{7!}{4!} = 8820$$

> mots de 5 lettres avec les lettres de SCULPTEUR.

Exercice 3

Un sellier attribue à chaque selle qu'il fabrique un numéro de série composé de huit chiffres et éventuellement complété d'une lettre correspondant à une option si elle est prise. Le premier chiffre est 1, 2 ou 3 selon le modèle choisi. Les lettres correspondant aux options sont L pour des quartiers allongés et C pour des quartiers raccourcis (aucune lettre si aucune option n'est choisie).

Combien de selles pourra-t-il ainsi répertorier au maximum ?

Il y a $3 \times 10^7 = 30000000$ nombres de 8 chiffres commençant par 1, 2 ou 3. À chacun de ces nombre peut être ajouté ou pas une des lettres L ou C. Il y a donc pour chacun de ces nombre 3 alternatives possibles et donc $3 \times 30000000 = 90000000$ numéros de série possibles.

Exercice 4

1. Combien y a-t-il de façons différentes de sélectionner deux binômes distincts et numérorés dans un groupe de 4 personnes ?

Pour sélectionner deux binômes numérotés dans un groupe de 4 personnes, il faut et suffit de sélectionner une première paire de personnes parmi les 4 (ordre pas important) pour former le premier binôme, puis une seconde paire parmi les deux restantes pour former le second. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{4!}{2^2} = 6$$

façons différentes de répartir un groupe de 4 personnes en binômes.

2. Combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de 4 personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ?

Il y a $2! = 2$ façons de numéroter les deux binômes et donc deux fois moins de façons de répartir 4 personnes en deux binômes distincts et non numérotés que de sélectionner deux binômes numérotés dans un groupe de 4 personnes. On déduit de la question précédente qu'il y a $\frac{6}{2} = 3$ façons de répartir 4 personnes en deux binômes distincts et non numérotés.

3. **[Bonus]** Combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de 8 personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ? Plus généralement, combien y a-t-il de façons différentes de répartir un groupe de $2n$ personnes en binômes (distincts mais non numérotés) ?

Pour sélectionner 4 binômes dans un groupe de 8 personnes, il faut et suffit de sélectionner une première paire de personnes parmi les 8 (ordre pas important), puis une deuxième paire parmi les 6 restantes, ..., et finalement une quatrième paire parmi les deux restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_8^2\mathbf{C}_6^2\mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{8!}{2!6!}\frac{6!}{2!4!}\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{8!}{2^4} = 2520$$

façons différentes de répartir un groupe de 8 personnes en binômes numérotés. Puisqu'il y a $4! = 24$ numérotations possibles des binômes, on obtient qu'il y a $\frac{2520}{24} = 105$ répartitions possibles de 8 personnes en binômes (non numérotés).

Ce qui précède se généralise facilement. Pour sélectionner n binômes numérotés dans un groupe de $2n$ personnes, il faut et suffit de slectionner une première paire de personnes parmi les $2n$, puis une deuxième paire parmi les $2n-2$ restantes, ..., et finalement une n^{e} paire parmi les deux restantes. Il y a donc :

$$\mathbf{C}_{2n}^2\mathbf{C}_{2n-2}^2 \dots \mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\dots\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

façons différentes de répartir un groupe de $2n$ personnes en binômes numérotés. Puisqu'il y a $n!$ numérotations possibles des binômes, on obtient qu'il y a $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ répartitions possibles de $2n$ personnes en binômes (non numérotés).