DUT GEA 1^{e} année
Mathématiques pour la gestion et statistiques, S1
Année universitaire 2017/2018

Correction du Contrôle Continu n° 2

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit AB. **(2 points)**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 12 + 5 \times (-2) & 1 \times (-5) + 5 \times 1 \\ 2 \times 12 + 12 \times (-2) & 2 \times (-5) + 12 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. **(2 points)**

On a :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = 1 \times 12 - 5 \times 2 = 2 \neq 0$$

donc A est inversible. Alternativement, on vient de voir que $AB = 2I_2$, ce qui implique que A est inversible et d'inverse $\frac{1}{2}B$ (et répond par la même occasion au bonus !).

3. La matrice C est-elle inversible ? Justifier. **(2,5 points)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en effectuant } L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2 \\ &= 0 \qquad \text{puisqu'une ligne ne contient que des 0.} \end{aligned}$$

Ainsi, C n'est pas inversible.

Exercice 2

Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array} \right. .$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(1,5 point)**

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(2 points)**

Avec A la matrice mise en évidence dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \\
\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -12 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} & \qquad \text{en effectuant } C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3,\ C_2 \leftarrow C_2 - 3C_3 \\
= 0 + 1 \times \det \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \qquad \text{en développant selon la } 1^{\text{e}} \text{ ligne} \\
= (-5) \times (-2) - (-12) \times 1 = 22 \neq 0. &
\end{aligned}$$

On en déduit que A est inversible et que (S) admet une unique solution.

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Déterminer A^{-1}. **(8 points)**

Déterminons A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On commence avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Le 1^{er} pivot est non nul, en effectuant $L_1 \leftarrow L_1/2$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

La première itération de la méthode de Gauss-Jordan se termine ici en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, ce qui conduit à :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}.$$

Le deuxième pivot est non nul et vaut $-\frac{9}{2}$. On effectue donc $L_2 \leftarrow -\frac{2}{9}L_2$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array},$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{2}L_2$, pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{7}{9} & 1 \end{array}.$$

Le troisième pivot est non nul et vaut $-\frac{22}{9}$. On effectue donc $L_3 \leftarrow -\frac{9}{22}L_3$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{7}{22} & -\frac{9}{22} \end{array},$$

et finalement, $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{9}L_3$, pour obtenir

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} & \frac{7}{22} & -\frac{9}{22} \end{array}\right. .$$

Ainsi, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{5}{22} \\ \frac{5}{11} & \frac{7}{22} & -\frac{9}{22} \end{pmatrix}$$

4. En déduire la solution de (S). **(2 points)**

La matrice A étant inversible, l'équation matricielle $AX = Y$ est équivalente à $X = A^{-1}Y$. La solution de (S) et donc donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{5}{22} \\ \frac{5}{11} & \frac{7}{22} & -\frac{9}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bonus (1 point)

Donner l'inverse de la matrice A de l'Exercice 1.

On a vu dans l'Exercice 1 que $AB = 2I_2$. Il s'ensuit que $A \times \frac{1}{2}B = I_2$ et donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$