Correction du Contrôle Continu n° 2

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit AB. **(2 points)**

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 7 + 5\times(-3) & 2\times(-5)+5\times 2 \\ 3\times 7 + 7\times(-3) & 3\times(-5)+7\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. **(2 points)**

On a :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 2\times 7 - 5\times 3 = -1 \neq 0$$

donc A est inversible. Alternativement, on vient de voir que $AB = -I_2$, ce qui implique que A est inversible et d'inverse $-B$ (et répond par la même occasion au bonus !).

3. La matrice C est-elle inversible ? Justifier. **(2,5 points)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(C) = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} &\\ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \qquad \text{en effectuant } C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2 \\ = 0 & \qquad \text{puisqu'une ligne ne contient que des 0.} \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice C n'est pas inversible.

Exercice 2

Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 13 \end{array} \right. .$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(1,5 point)**

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(2 points)**

Avec A la matrice mise en évidence dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} && \text{en effectuant } C_1 \leftarrow C_1 - 3C_3,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= 0 + 1 \times \det\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} && \text{en développant selon la } 1^{\text{e}} \text{ ligne} \\
&= (-8) \times 2 - (-6) \times (-1) = -22 \neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que A est inversible et que (S) admet une unique solution.

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Déterminer A^{-1}. **(8 points)**

Déterminons A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On commence avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Le 1^{er} pivot est non nul, en effectuant $L_1 \leftarrow L_1/3$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

La première itération de la méthode de Gauss-Jordan se termine ici en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, ce qui conduit à :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}.$$

Le deuxième pivot est non nul et vaut $-\frac{10}{3}$. On effectue donc $L_2 \leftarrow -\frac{3}{10}L_2$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array},$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2$, pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{7}{10} & 1 \end{array}.$$

Le troisième pivot est non nul et vaut $\frac{11}{5}$. On effectue donc $L_3 \leftarrow \frac{5}{11}L_3$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{22} & \frac{7}{22} & \frac{5}{11} \end{array},$$

et finalement, $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{5}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{5}L_3$, pour obtenir

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{5}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{4}{11} \\ -\frac{9}{22} & \frac{7}{22} & \frac{5}{11} \end{matrix}.$$

Ainsi, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{5}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{4}{11} \\ -\frac{9}{22} & \frac{7}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

4. En déduire la solution de (S). **(2 points)**

La matrice A étant inversible, l'équation matricielle $AX = Y$ est équivalente à $X = A^{-1}Y$. La solution de (S) et donc donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{5}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{4}{11} \\ -\frac{9}{22} & \frac{7}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bonus (1 point)

Donner l'inverse de la matrice A de l'Exercice 1.

On a vu dans l'Exercice 1 que $AB = -I_2$. Il s'ensuit que $A \times (-B) = I_2$ et donc :

$$A^{-1} = -B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$