IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année TD5, 2017-2018, S2
Mathématiques financières

Corrigé du Contrôle Continu n° 2

Question de cours : *(2 points)*

Donner les formules permettant de calculer le taux périodique $\tau_{\text{pér}}$ et le taux (annuel) effectif τ_{eff} d'un produit financier proposé au taux nominal τ_{nom} et pour lequel il y a n capitalisations par an.

On a :

$$\tau_{\text{pér}} = \frac{\tau_{\text{nom}}}{n} \qquad \text{et} \qquad \tau_{\text{eff}} = (1+\tau_{\text{pér}})^n - 1 = \left(1 + \frac{\tau_{\text{nom}}}{n}\right)^n - 1.$$

Exercice 1 : *(3 points)*

On considère un placement de 500€ au taux d'intérêt composé au taux annuel de 4%.

1. Quelle est la valeur acquise par ce placement au bout de 8 ans ?

   Notons V_n la valeur acquise par ce placement au bout de n années et C_0 le capital placé. Puisque les intétêts sont composés, on a :

   $$V_n = C_0(1+\tau)^n = 500 \times 1,04^n.$$

   En particulier, la valeur acquise au bout de 8 ans est :

   $$V_8 = 500 \times 1,04^8 \simeq 684,28€.$$

2. Quelle doit-être la durée minimale du placement si l'on souhaite un capital final d'au moins 800€ ?

   Avec les notations précédentes, il suffit d'écrire que :

   $$\begin{aligned} V_n \geq 800 &\iff 500 \times 1,04^n \geq 800 \\ &\iff 1,04^n \geq \frac{800}{500} = 1,6 \\ &\iff n\ln(1,04) = \ln(1,04^n) \geq \ln(1,6) \qquad (\text{car } \ln \text{ est croissante et } \ln(a^n) = n\ln(a)) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(1,6)}{\ln(1,04)} \simeq 11,98 \qquad (\text{car } \ln(1,04) > 0). \end{aligned}$$

   Il faut donc attendre au moins 12 ans.

Exercice 2 : *(3 points)*

Déterminer la valeur acquise, juste après le dernier versement, d'une suite de 9 annuités de 300€ au taux annuel de 1,5%.

On peut synthétiser l'information dans le tableau suivant :

n° de l'année k	1	...	8	9
annuité a_k	300	...	300	300
valeur de a_k juste après le 9e versement	$300 \times 1,015^8$	...	$300 \times 1,015$	300

La valeur acquise juste après le dernier versement de cette suite d'annuités est donc :

$$300 + 300 \times 1,015 + \cdots + 300 \times 1,015^8 = 300 \times \frac{1 - 1,015^9}{1 - 1,015} \simeq 2867,80€.$$

Exercice 3 : *(4 points)* On considère un emprunt de $C_0 = 5000$€ amortissable par le versement d'annuités d'amortissement constant égal à $m = 1250$€. La première annuité s'élève à 1300€.

1. Combien de versements auront lieu pour rembourser cet emprunt ?

   Rappelons que la somme des amortissements est le capital emprunté. Ceux-ci étant constants égaux à $m = 1250$, leur somme est nm où n est le nombre de versements. On a donc $nm = C_0$ et ainsi

$$n = \frac{C_0}{m} = \frac{5000}{1250} = 4.$$

   Il y aura 4 versements.

2. Donner le montant I_1 des intérêts de la première période.

   Le montant a_1 de la première annuité se décompose comme $a_1 = m_1 + I_1 = m + I_1$. Ainsi,

$$I_1 = a_1 - m = 1300 - 1250 = 50€.$$

3. Exprimer I_1 en fonction de C_0 et du taux τ de l'emprunt. En d éduire le taux de l'emprunt.

   On a :

$$I_1 = C_0\tau = 5000\tau$$

   donc

$$\tau = \frac{I_1}{5000} = \frac{50}{5000} = 0,01 = 1\%.$$

4. Dresser le tableau d'amortissement.

   Celui-ci prend la forme suivante.

n° de l'année k	capital restant dû C_{k-1}	intérêts de la k^e période I_k	k^e amortissement m_k	k^e annuité a_k
1	5000	$5000 \times 0,01 = 50$	1250	1300
2	$3750 = 5000 - 1250$	$37,50$	1250	$1287,50$
3	2500	25	1250	1275
4	1250	$12,50$	1250	$1262,50$

Exercice 4 : *(4 points)*

Un emprunt indivis amortissable par 10 annuités constantes est tel que le premier amortissement est égal 79504,60€ alors que le troisième s'élève à 87653,8215€ (valeur théorique).

1. Calculer le taux d'intérêt.

   Rappelons que les annuités étant constantes les amortissements vérifient :

$$m_{k+1} = (1+\tau)m_k$$

   où τ est le taux de l'emprunt. On a donc : $m_3 = (1+\tau)^2 m_1$ et $1+\tau > 0$. On en déduit que

$$\tau = \sqrt{\frac{m_3}{m_1}} - 1 = \sqrt{\frac{87653,8215}{79504,60}} - 1 = 0,05 = 5\%.$$

2. Calculer le montant initial de l'emprunt.

   Rappelons que, pour un emprunt à annuités constantes, le premier amortissement vérifie : $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$ où n est le nombre d'annuités et C_0 le capital emprunté. Ce dernier est donc :

$$C_0 = m_1\frac{(1+\tau)^{10} - 1}{\tau} = 79504,60\frac{1,05^{10} - 1}{0,05} \simeq 1000000,31€.$$

Exercice 5 : *(4 points)*

Pour emprunter une somme de 13000€, un particulier a le choix entre deux banques. La banque A propose de rembourser l'emprunt (et les intérêts correspondants) par un seul versement de 14000€, 2 ans après l'emprunt. La banque B propose de rembourser l'emprunt (et les intérêt correspondants) par deux versements de 7000€, le premier 1 an après l'emprunt, le second 2 ans après l'emprunt.

1. Calculer le TAEG du prêt proposé par chacune des deux banques.

   Le TAEG τ_A de la banque A vérifie :
   $$13000 = \frac{14000}{(1+\tau_A)^2}$$
   donc
   $$\tau_A = \sqrt{\frac{14000}{13000}} - 1 \simeq 0,038 = 3,8\%.$$
   Le TAEG τ_B de la banque B vérifie :
   $$1300 = \frac{7000}{1+\tau_B} + \frac{7000}{(1+\tau_B)^2}.$$
   En posant $x = 1/(1+\tau_B) > 0$ on se ramène à résoudre :
   $$7000x^2 + 7000x = 13000,$$
   soit
   $$7000x^2 + 7000x - 13000 = 0.$$
   Le discriminant de ce polynôme est
   $$\Delta = 7000^2 - 4 \times 7000 \times (-13000) = 413000000.$$
   On obtient une solution négative que l'on élimine et une seconde :
   $$x_2 = \frac{-7000 + \sqrt{413000000}}{2 \times 7000}$$
   permettant de déduire la valeur du TAEG τ_B en écrivant que :
   $$\frac{1}{1+\tau_B} = x_2$$
   et donc
   $$\tau_B = \frac{1}{x_2} - 1 = \frac{1}{\frac{-7000+\sqrt{413000000}}{2\times 7000}} - 1 \simeq 0,051 = 5,1\%.$$

2. Laquelle choisir ?

   On s'oriente vers la banque proposant le TAEG le plus faible, c'est-à-dire la banque A.

Exercice 6 : [Bonus] *(2 points)*

Rappelons que le taux de rendement interne (TRI) d'un investissement I qui rapporte annuellement un revenu constant R pendant n années est le taux τ qui annule la valeur actuelle nette (VAN) de l'investissement, c'est-à-dire vérifiant l'équation :
$$-I + R\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau} = 0.$$
Une entreprise peut investir dans une nouvelle machine pour un montant de 39019,66€. Ceci lui rapportera 10000€ chaque année pendant 4 ans.

1. Écrire l'équation définissant le TRI dans ce cadre.

   On a ici un investissement de $I = 39019,66$€, rapportant annuellement un revenu constant $R = 10000$€ pendant $n = 4$ années. Avec ces valeurs, l'équation définissant le TRI τ de l'investissement s'écrit :
   $$-39019,66 + 10000\frac{1-(1+\tau)^{-4}}{\tau} = 0.$$

2. Vérifier que le TRI est d'environ 1%.

   En injectant la valeur de tau de 1% dans le membre de gauche de la dernière équation, on constate que :

$$-39019,66 + 10000\frac{1-(1+0,01)^{-4}}{0,01} \simeq -0,004 \simeq 0$$

   ce qui indique que le TRI de cet investissement est effectivement d'environ 1%.

3. Sur le marché, une banque propose un produit financier rémunéré au taux annuel de 2%. L'entreprise a-t-elle intérêt à investir dans cette nouvelle machine ?

   Le produit financier proposé par la banque est rémunéré à un taux annuel supérieur au TRI de l'investissement. L'entreprise n'a aucun intérêt à réaliser cet investissement puisqu'elle réalisera un plus grand profit en plaçant chez cette banque la somme qu'elle aurait du investir (et sans travailler !).