IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2017-2018, S2

Corrigé du Contrôle Continu n^o 2

Questions de cours :

1. À quelles conditions peut-on approcher (convenablement) une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}in(n,p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'un certain paramètre λ ? Donner l'expression λ en fonction des paramètres de la loi binomiale considérée.
   On peut approcher (convenablement) une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}in(n,p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, si p est proche de 0 ($p \leq 0,1$), $n \geq 30$ et $np \leq 10$. Le paramètre de la loi de Poisson est alors donné par $\lambda = np$.
2. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Donner $\mathbf{P}[X=k]$ pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}[X]$.
   Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$$\mathbf{P}[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{pour } k \in \mathbf{N},$$
$$\mathbf{E}[X] = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}[X] = \lambda.$$

Exercice 1 :

Dans une entreprise, il y a 10% de cadres et 90% d'employés. Une enquête est effectuée sur la possibilité d'instaurer la journée continue. Il s'avère que 4 cadres sur 5 sont favorables au projet contre 2 employés sur 3.

Dans cet exercice on notera :
— C l'événement "*la personne interrogée est un cadre*",
— F l'événement "*la personne interrogée est favorable au projet*".
On sait que :
$$\mathbf{P}[C] = 0,1, \qquad \mathbf{P}[\overline{C}] = 0,9, \qquad \mathbf{P}[F|C] = \frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}[F|\overline{C}] = \frac{2}{3}.$$

1. Si l'on interroge une personne au hasard dans l'entreprise, quelle est la probabilité qu'elle soit favorable au projet ?
   Il s'agit de :
$$\mathbf{P}[F] = \mathbf{P}[F|C]\mathbf{P}[C] + \mathbf{P}[F|\overline{C}]\mathbf{P}[\overline{C}] = \frac{4}{5} \times 0,1 + \frac{2}{3} \times 0,9 = 0,68$$
   où l'on a utilisé la formule des probabilités totales (version conditionnelle).
2. Si l'on interroge une personne opposée au projet, quelle est la probabilité que ce soit un employé ?
   Il s'agit de :
$$\mathbf{P}[\overline{C}|\overline{F}] = \frac{\mathbf{P}[\overline{C} \cap \overline{F}]}{\mathbf{P}[\overline{F}]} = \frac{\mathbf{P}[\overline{F}|\overline{C}]\mathbf{P}[\overline{C}]}{1-\mathbf{P}[F]} = \frac{(1-\mathbf{P}[F|\overline{C}])\mathbf{P}[\overline{C}]}{1-\mathbf{P}[F]}$$
$$= \frac{\left(1-\frac{2}{3}\right) \times 0,9}{1-0,68} = 0,9375.$$

Exercice 2 : Une personne, peu organisée, souhaite sortir un stylo rouge de sa trousse contenant 12 stylos dont 3 rouges. Pour cela elle en sort un au hasard. Si le stylo n'est pas rouge, elle l'y remet et recommence, sinon elle s'arrête. On note X le nombre d'essais qu'elle fera.

1. Quelle est la loi de X ? (justifier)
   On s'intéresse au nombre d'essais X nécessaires pour obtenir un (premier) succès en répétant *indépendamment* la même expérience de Bernoulli. La probabilité de succès pour chacune de ces expériences de Bernoulli est ici $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. On a donc $X \sim \mathcal{G}eo\left(\frac{1}{4}\right)$.
2. Combien d'essais peut-elle espérer faire ?
   En moyenne, cette personne peut espérer faire :
   $$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ essais.}$$
3. Quelle est la probabilité pour qu'elle fasse au plus 3 essais ?
   Il s'agit de :
   $$\mathbf{P}[X \leq 3] = \mathbf{P}[X = 1]+\mathbf{P}[X = 2]+\mathbf{P}[X = 3] = \left(1-\frac{1}{4}\right)^0 \frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)^1 \frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{37}{64} \simeq 0,5781.$$
4. Quelle est la probabilité pour qu'elle fasse au moins 3 essais ? Il s'agit de :
   $$\mathbf{P}[X \geq 3] = 1-\mathbf{P}[X \leq 2] = 1-(\mathbf{P}[X = 1] + \mathbf{P}[X = 2]) = 1-\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)^0 \frac{1}{4} + \left(1-\frac{1}{4}\right)^1 \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} = 0,5625.$$

Exercice 3 : Sur une chaîne de fabrication, on sait que 9% objets produits présentent un défaut. Ces produits sont commercialisés par lots de 10 et un lot ne peut être vendu que s'il contient (strictement) moins de 3 objets défectueux.

1. Déterminer la loi du nombre X d'objets défectueux dans un lot. (justifier)
   Pour $i = 1, \dots, 10$, définissons :
   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{e}} \text{ objet du lot est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   On sait que $X_i \sim \mathcal{B}er(0,09)$ et l'on suppose que les X_i sont indépendants. Ainsi,
   $$X = X_1 + \cdots + X_{10} \sim \mathcal{B}in(10,\ 0,09).$$
2. Vérifier que la probabilité pour qu'un lot puisse être vendu est d'approximativement 0,94596.
   Cette probabilité est :
   $$\begin{aligned} p = \mathbf{P}[X < 3] &= \mathbf{P}[X = 0] + \mathbf{P}[X = 1] + \mathbf{P}[X = 2] \\ &= \binom{10}{0} 0,09^0 (1-0,09)^{10} + \binom{10}{1} 0,09^1 (1-0,09)^9 + \binom{10}{2} 0,09^2 (1-0,09)^8 \\ &\simeq 0,94596. \end{aligned}$$
3. Une semaine donnée, l'entreprise prévoit de fabriquer 100 lots. Quelle est la loi du nombre N de lots qui pourront être vendus cette semaine ?
   Pour $i = 1, \dots, 100$, définissons :
   $$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{e}} \text{ lot produit dans la semaine peut être commercialisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   On sait que, pour $i = 1, \dots, 100$, $Y_i \sim \mathcal{B}er(p)$, avec $p \simeq 0,94596$ déterminé dans la question précédente. On suppose que les Y_i sont indépendants. Ainsi,
   $$N = Y_1 + \cdots + Y_{100} \sim \mathcal{B}in(100,\ p).$$

4. Combien de lots peut-elle espérer commercialiser cette semaine ?
   L'entreprise peut espérer commercialiser :
   $$\mathbf{E}[N] = 100p \simeq 95$$
   lots parmi les 100 lots produits en une semaine.
5. Quelle est la probabilité pour que l'entreprise puisse commercialiser tous les lots produits cette semaine ?
   Il s'agit de :
   $$\mathbf{P}[N = 100] = \binom{100}{100} p^{100}(1-p)^0 \simeq 0,94596^{100} \simeq 0,0039.$$

Exercice 4 : Une entreprise compte 500 clients. Chaque jour, chacun de ces clients à 1% de chance d'appeler le standard téléphonique de l'entreprise. On note N le nombre de clients appelant ce standard un jour donné.

1. Déterminer la loi de N (justifier).
   Pour $i = 1, \ldots, 500$, définissons :
   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{e}} \text{ client appelle le standard} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   On sait que $X_i \sim \mathcal{B}er(0,01)$ et l'on suppose que les X_i sont indépendants. Ainsi,
   $$N = X_1 + \cdots + X_{500} \sim \mathcal{B}in(500,\ 0,01).$$
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de N ? (justifier) Donner son ou ses paramètres.
   Puisque N suit une loi binomiale avec $n = 500 \geq 30$, p proche de 0 ($p = 0,01 \leq 0,1$) et $np = 500 \times 0,01 = 5 \leq 10$, on peut approcher N par $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = np = 5$.
3. En utilisant le résultat de la question précédente, donner une valeur approchée de :
   (a) la probabilité pour qu'aucun client n'appelle le standard,
   Il s'agit de :
   $$P[N = 0] \simeq P[X = 0] = e^{-5}\frac{5^0}{0!} = e^{-5} \simeq 0,0067.$$
   (b) la probabilité pour qu'au moins trois clients appellent le standard.
   Il s'agit de :
   $$\begin{aligned} P[N \geq 3] \simeq P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] &= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) \\ &= 1 - (e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!}) = 1 - \frac{37}{2}e^{-5} \simeq 0,8753. \end{aligned}$$