IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2017-2018, S1

Corrigé du Contrôle Continu n° 3

Question de cours :

Soit u, v deux fonctions dérivables. Donner l'expression des dérivées de $\dfrac{u}{v}$ et $\exp(u)$.

1. Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et u et v sont dérivables en x avec $v(x) \neq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

2. Si $g(x) = \exp(u(x))$ et u est dérivable en x, on a :

$$g'(x) = u'(x)\exp(u(x)).$$

Exercice 1 :

Une entreprise spécialisée dans la construction de bâteaux de plaisance, fabrique 3 types de coques C_1, C_2, C_3 à partir de 3 matières premières, qui sont l'aluminium R_1, la fibre de carbone R_2, l'acier R_3. La fabrication :
— d'une coque de type C_1 consomme 50 Kg de R_1, 20 Kg de R_2, 1000 Kg de R_3,
— d'une coque de type C_2 consomme 60 Kg de R_1, 30 Kg de R_2, 1000 Kg de R_3,
— d'une coque de type C_3 consomme 40 Kg de R_1, 50 Kg de R_2, 500 Kg de R_3.
On désigne un programme de production, et un vecteur de ressources consommées respectivement par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire une relation matricielle liant X et Y.
2. Vérifier que l'inverse de la matrice mise en évidence dans 1 est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{50} & \frac{1}{25} & \frac{9}{1250} \\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{50} & -\frac{17}{2500} \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{3}{2500} \end{pmatrix}$$

3. Sachant que l'entreprise dispose d'un stock de ressources $Y = \begin{pmatrix} 2100 & 2000 & 35000 \end{pmatrix}^T$, déterminer, s'il existe, le programme de production X qui épuise exactement ce stock de ressources. Commenter.

1. On écrit pour chaque matière première (R_1, R_2, R_3), l'équation donnant la quantité consommée par la fabrication de x_1 coques C_1, x_2 coques C_2 et x_3 coques C_3. On obtient :
   — pour R_1 : $50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = y_1$,
   — pour R_2 : $20x_1 + 30x_2 + 50x_3 = y_2$,
   — pour R_3 : $1000x_1 + 1000x_2 + 500x_3 = y_3$.
   Pour résumer, on obtient le système :

$$\begin{cases} 50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = y_1 \\ 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 = y_2 \\ 1000x_1 + 1000x_2 + 500x_3 = y_3 \end{cases}$$

   qui s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$\begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 20 & 30 & 50 \\ 1000 & 1000 & 500 \end{pmatrix}.$$

2. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 20 & 30 & 50 \\ 1000 & 1000 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{50} & \frac{1}{25} & \frac{9}{1250} \\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{50} & -\frac{17}{2500} \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{3}{2500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour justifier que A est inversible et que son inverse est la matrice annoncée.

3. Pour qu'un tel programme de production existe, il faut (et suffit) que le système représenté par

$$AX = \begin{pmatrix} 2100 \\ 2000 \\ 35000 \end{pmatrix}$$

admette une solution à valeurs dans $\mathbf{N}$. Or, A étant inversible l'équation précédente est équivalente à :

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2100 \\ 2000 \\ 35000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -22 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

On aurait donc $x_2 = -22 < 0$, ce qui est impossible. Un tel programme de construction n'existe donc pas.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x + y = 10 \\ 2^x - 5^y = 0 \end{cases}.$$

Rappelons que pour $a > 0$, $a^x = \exp(x \ln(a))$. Ainsi, le système (S) est bien défini sur $\mathbb{R}^2$.
On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 10 \\ 2^x - 5^y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ \exp(x \ln(2)) - \exp(y \ln(5)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ \exp(x \ln(2)) = \exp(y \ln(5)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x \ln(2) = y \ln(5)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ y = \frac{\ln(2)}{\ln(5)} x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\ln(2)}{\ln(5)} x = 10 \\ y = \frac{\ln(2)}{\ln(5)} x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(5)}) = 10 \\ y = \frac{\ln(2)}{\ln(5)} x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{1+\frac{\ln(2)}{\ln(5)}} = \frac{10 \ln(5)}{\ln(5)+\ln(2)} \\ y = \frac{\ln(2)}{\ln(5)} \frac{10}{1+\frac{\ln(2)}{\ln(5)}} = \frac{10 \ln(2)}{\ln(5)+\ln(2)} \end{cases}. \end{aligned}$$

On vient de déterminer l'unique solution de ce système.

Exercice 3 : Soit f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 9}{x^2 - 1}.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f.

1. La fonction f est bien définie si, et seulement si, $x^2 - 1 \neq 0$, c-à-d $x \neq \pm 1$. Ainsi, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Remarquons que f s'écrit sous la forme
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{avec } u(x) = 2x^3 - 2x + 9 \text{ et } v(x) = x^2 - 1.$$
En appliquant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient, que pour $x \neq \pm 1$:
$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} &= \frac{(6x^2-2)(x^2-1) - (2x^3-2x+9) \times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 4x^2 - 18x + 2}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : (6 points)

Une entreprise fabrique un seul produit vendu 50€ l'unité. Les frais fixes de l'entreprise s'élèvent à 1200€ par jour. On note x le nombre d'unités produites quotidiennement. Le coût de la production de x unités en une journée est :
$$\frac{50}{1 + 3\ln(10)} x \ln(x).$$

1. Exprimer en fonction de la quantité produite $x > 0$, le bénéfice quotidien de l'entreprise. On notera $f(x)$ cette quantité.
2. Calculer la dérivée de la fonction f mise en évidence dans 1..
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. En déduire le nombre d'unités que doit produire, chaque jour, l'entreprise pour maximiser son bénéfice quotidien.

1. Le bénéfice quotidien de l'entreprise produisant (et vendant) $x > 0$ unités ce compose du montant des ventes $50x$€ auquel on retranche les frais fixes quotidiens 1200€ et le coût de la production des x unités $\frac{50}{1+3\ln(10)} x \ln(x)$. Ce bénéfice s'exprime donc comme :
$$f(x) = 50x - 1200 - \frac{50}{1 + 3\ln(10)} x \ln(x) \qquad x > 0.$$
2. En utilisant les formules habituelles de dérivation (en particulier celle d'un produit), on obtient que pour $x > 0$:
$$f'(x) = 50 - \frac{50}{1 + 3\ln(10)} \left(\ln(x) + x\frac{1}{x} \right) = 50 - \frac{50}{1 + 3\ln(10)} (\ln(x) + 1).$$
3. On a pour $x > 0$:
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 50 - \frac{50}{1 + 3\ln(10)} (\ln(x) + 1) = 0 \\ &\iff \frac{1}{1 + 3\ln(10)} (\ln(x) + 1) = 1 \\ &\iff \ln(x) + 1 = 1 + 3\ln(10) = 1 + \ln(1000) \\ &\iff x = 1000. \end{aligned}$$
4. Le tableau de variations de f prend donc la forme suivante.

x	0		1000		∞
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ -1200	$\nearrow$	$f(1000)$	$\searrow$	$-\infty$

5. On déduit du tableau de variations précédent que le nombre d'unités que doit produire, chaque jour, l'entreprise pour maximiser son bénéfice quotidien est 1000.