DUT GEA 1^{e} année
Mathématiques pour la gestion et statistiques, S1
Année universitaire 2018/2019

Correction du Contrôle Continu n° 2

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit AB. **(2 points)**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 3\times(-4) & 1\times 6 + 3\times 8 \\ 7\times 2 + 9\times(-4) & 7\times 6 + 9\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 30 \\ -22 & 114 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. **(2 points)**

On a :

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 1\times 9 - 3\times 7 = -12 \neq 0$$

donc A est inversible.

3. La matrice C est-elle inversible ? Justifier. **(2,5 points)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} && \text{en effectuant } C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \\ &= 0 && \text{puisqu'une colone ne contient que des 0.} \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice C n'est pas inversible.

Exercice 2

Considérons le système : Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 34 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 38 \end{cases}.$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(1,5 point)**

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 16 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(2 points)**

Avec A la matrice mise en évidence dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} && \text{en effectuant } L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\
&= -(-5) \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} && \text{en développant selon la 1}^{\text{e}} \text{ ligne} \\
&= 5 \times (1 \times 2 - 1 \times 3) = -5 \neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que A est inversible et que (S) admet une unique solution.

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Déterminer A^{-1}. **(8 points)**

Déterminons A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On commence avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Le 1$^{\text{er}}$ pivot est non nul, en effectuant $L_1 \leftarrow L_1/4$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

La première itération de la méthode de Gauss-Jordan se termine ici en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}.$$

Le deuxième pivot est non nul et vaut $\frac{3}{2}$. On effectue donc $L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array},$$

puis, on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{2}L_2$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}.$$

Le troisième pivot est non nul et vaut $-\frac{5}{6}$. On effectue donc $L_3 \leftarrow -\frac{6}{5}L_3$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \end{array},$$

et finalement, $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 1\frac{1}{6}L_3$, pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}$$

Ainsi, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

4. En déduire la solution de (S). **(2 points)**

La matrice A étant inversible, l'équation matricielle $AX = Y$ est équivalente à $X = A^{-1}Y$. La solution de (S) et donc donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 16 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bonus (1 point)

Donner les coefficients manquants dans le produit matriciel suivant. Expliquez comment il est possible de les obtenir (sans calcul) dans le cas présent.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 6 & -14 \\ 26 & 34 & 7 & -16 \\ 6 & 7 & 5 & -13 \\ -14 & -16 & -13 & 34 \end{pmatrix}.$$

On a utilisé que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique.