DUT GEA 1^{e} année
Mathématiques pour la gestion et statistiques, S1
Année universitaire 2018/2019

Correction du Contrôle Continu n^{o} 2

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit AB. **(2 points)**

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 18 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 & 2 \times (-1) + 5 \times (-2) \\ 18 \times 3 + 45 \times 4 & 18 \times (-1) + 45 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -12 \\ 234 & -108 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. **(2 points)**

On a :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 18 & 45 \end{pmatrix} = 2 \times 45 - 5 \times 18 = 0$$

donc A n'est pas inversible.

3. La matrice C est-elle inversible ? Justifier. **(2,5 points)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} && \text{en effectuant } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ &= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} && \text{en développant le long de la 3}^{\text{e}} \text{ colone} \\ &= 3 \times (1 \times 7 - 2 \times 4) = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice C est inversible.

Exercice 2

Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & + & x_2 & +2 & x_3 & = & 8 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4 \end{array} \right. .$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(1,5 point)**

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(2 points)**

Avec A la matrice mise en évidence dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{en effectuant } C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\
&= 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en développant selon la } 1^{\text{e}} \text{ ligne} \\
&= 3 \times (1 \times 1 - 2 \times 3) = -15 \neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que A est inversible et que (S) admet une unique solution.

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Déterminer A^{-1}. **(8 points)**

Déterminons A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On commence avec le tableau :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right..$$

Le 1^{er} pivot est non nul et vaut 1. En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right..$$

Le deuxième pivot est non nul et vaut 5. On effectue donc $L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2$ pour obtenir :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right..$$

puis, on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ pour obtenir :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{array}\right..$$

Le troisième pivot est non nul et vaut 3. On effectue donc $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$ pour obtenir :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{array}\right..$$

et finalement, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, pour obtenir :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Ainsi, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4. En déduire la solution de (S). **(2 points)**

La matrice A étant inversible, l'équation matricielle $AX = Y$ est équivalente à $X = A^{-1}Y$. La solution de (S) et donc donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bonus (1 point)

Donner les coefficients manquants dans le produit matriciel suivant. Expliquez comment il est possible de les obtenir (sans calcul) dans le cas présent.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 18 \\ 5 & 10 & 3 & 19 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 18 & 19 & 4 & 65 \end{pmatrix}.$$

On a utilisé que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique.