

Contrôle Continu n° 3

Durée : 1h25

*L'usage de tout document ou dispositif électronique est interdit à l'exception de celui de la calculatrice **non** programmable. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Le barème mentionné est indicatif et susceptible d'être modifié.*

Questions de cours : (2 points)

Soit A une matrice carrée.

1. À quelle condition dit-on que A est inversible ? (Définition).
2. Donner un critère permettant de déterminer si une matrice est inversible ou non.

Exercice 1 : (5 points)

Les produits finis Y_1 , Y_2 et Y_3 sont fabriqués à partir de produits intermédiaires P_1 et P_2 selon le mode suivant :

- 1 unité de Y_1 nécessite 8 unités de P_1 et 1 unité de P_2 ,
- 1 unité de Y_2 nécessite 3 unités de P_1 et 2 unités de P_2 ,
- 1 unité de Y_3 nécessite 6 unités de P_1 et 1 unité de P_2 .

Les produits P_1 et P_2 sont fabriqués à partir de trois matières premières M_1 , M_2 et M_3 selon le mode suivant

- 1 unité de P_1 nécessite 7 unités de M_1 , 1 unité de M_2 et 5 unités de M_3 ,
- 1 unité de P_2 nécessite 3 unités de M_1 , 4 unités de M_2 et 1 unités de M_3 .

On note :

- y_i le nombre de produits finis Y_i fabriqués, $i = 1, 2, 3$,
- p_i le nombre de produits intermédiaires P_i fabriqués à partir des matières premières et utilisés pour la fabrication des produits finis, $i = 1, 2$,
- m_i la quantité de matière première M_i utilisée, $i = 1, 2, 3$.

On note également

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation matricielle entre Y et P .
2. Déterminer une relation matricielle entre P et M .
3. En déduire une relation matricielle entre Y et M .
4. De quelles quantités de M_1 , M_2 et M_3 a-t-on besoin pour produire 10 unités de Y_1 , 15 unités de Y_2 et 5 unités de Y_3 ?

Exercice 2 (3 points)

On considère l'équation :

$$2 \ln(5x - 3) = \ln(10x - 6). \quad (\text{E})$$

1. Sur quel ensemble est définie l'équation (E) ?
2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 3 : (5 points)

Soit f et g définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x \ln(x).$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f .
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
4. Donner le domaine de définition de g .
5. Calculer la dérivée de g .
6. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.

Exercice 4 : (5+1 points)

Suite à l'évolution de son secteur d'activité, une entreprise de 200 salariés doit restructurer ses services. Pour cela, elle procédera à des créations et suppressions de postes jusqu'au moment où elle retrouvera son effectif initial.

Il est connu en avance, qu'au bout de x mois de restructuration, l'entreprise aura créé $g(x) = 12 \exp(9x - 72)$ postes et supprimé $h(x) = 27 \exp(4x - 32)$ postes.

1. Donner l'expression de l'effectif $f(x)$ de l'entreprise après x mois de restructuration.
2. Calculer la dérivée de la fonction f mise en évidence dans 1..
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbf{R}_+ .
5. En déduire le moment auquel l'entreprise aura un effectif minimal au cours de cette restructuration ainsi que la valeur de cet effectif minimal.
6. **[Bonus]** Justifier que la restructuration prendra fin au cours du 9^e mois.