IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2018-2019, S1

Corrigé du Contrôle Continu n° 3

Questions de cours :

Soit A une matrice carrée.

1. À quelle condition dit-on que A est inversible ? (Définition).
   On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telle que :
   $$AB = BA = I_n$$
   où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
2. Donner un critère permettant de déterminer si une matrice est inversible ou non.
   Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, son déterminant $\det(A)$ est non nul.

Exercice 1 :

Les produits finis Y_1, Y_2 et Y_3 sont fabriqués à partir de produits intermédiaires P_1 et P_2 selon le mode suivant :

1 unité de Y_1 nécessite 8 unités de P_1 et 1 unité de P_2,
1 unité de Y_2 nécessite 3 unités de P_1 et 2 unités de P_2,
1 unité de Y_3 nécessite 6 unités de P_1 et 1 unité de P_2.

Les produits P_1 et P_2 sont fabriqués à partir de trois matières premières M_1, M_2 et M_3 selon le mode suivant

1 unité de P_1 nécessite 7 unités de M_1, 1 unité de M_2 et 5 unités de M_3,
1 unité de P_2 nécessite 3 unités de M_1, 4 unités de M_2 et 1 unités de M_3.

On note :

- y_i le nombre de produits finis Y_i fabriqués, $i = 1, 2, 3$,
- p_i le nombre de produits intermédiares P_i fabriqués à partir des matières premières et utilisés pour la fabrication des produits finis, $i = 1, 2$,
- m_i la quantité de matiȋre première M_i utilisée, $i = 1, 2, 3$.

On note également

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation matricielle entre Y et P.
   On détermine, dans un premier temps une équation par ressource. Ici, les produits finis Y_1, Y_2, Y_3 étant fabriqués à partir des produits intermédiaires P_1, P_2, on doit trouver une équation pour chaque P_i. On obtient :
   (a) équation liée à la ressource P_1 :
   $$8y_1 + 3y_2 + 6y_3 = p_1,$$
   (b) équation liée à la ressource P_2 :
   $$y_1 + 2y_2 + y_3 = p_2.$$
   Pour résumer, on a obtenu le système :
   $$\begin{cases} 8y_1 + 3y_2 + 6y_3 = p_1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = p_2 \end{cases}$$
   qui s'écrit matriciellement sous la forme $AY = P$ avec
   $$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer une relation matricielle entre P et M.
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 7p_1+3p_2 & = & m_1 & \text{(éq. liée à la ressource } M_1\text{)} \\ p_1+4p_2 & = & m_2 & \text{(éq. liée à la ressource } M_2\text{)} \\ 5p_1+p_2 & = & m_3 & \text{(éq. liée à la ressource } M_3\text{)} \end{array}\right.$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme $M = BP$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire une relation matricielle entre Y et M.
On déduit des deux questions précédentes que :

$$\begin{aligned} M &= BP = BAY \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y \\ &= \begin{pmatrix} 59 & 27 & 45 \\ 12 & 11 & 10 \\ 41 & 17 & 31 \end{pmatrix} Y. \end{aligned}$$

4. De quelles quantités de M_1, M_2 et M_3 a-t-on besoin pour produire 10 unités de Y_1, 15 unités de Y_2 et 5 unités de Y_3 ?
On a ici :

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à

$$M = \begin{pmatrix} 59 & 27 & 45 \\ 12 & 11 & 10 \\ 41 & 17 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1220 \\ 335 \\ 820 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc 1220 unités de M_1, 335 unités de M_2 et 820 unités de M_3 pour produire 10 unités de Y_1, 15 unités de Y_2 et 5 unités de Y_3.

Exercice 2

On considère l'équation :

$$2\ln(5x-3) = \ln(10x-6). \qquad \text{(E)}$$

1. Sur quel ensemble est définie l'équation (E) ?
L'équation (E) est bie définie si, et seulement si, $5x-3>0$ et $10x-6>0$, c'est-à-dire sur $]\frac{3}{5};+\infty[$.

2. Résoudre l'équation (E).
Pour $x > \frac{3}{5}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\Longleftrightarrow 2\ln(5x-3) = \ln(2\times(5x-3)) \\ &\Longleftrightarrow 2\ln(5x-3) = \ln(2)+\ln(5x-3) \\ &\Longleftrightarrow \ln(5x-3) = \ln(2) \\ &\Longleftrightarrow 5x-3 = 2 \\ &\Longleftrightarrow 5x = 5 \\ &\Longleftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

L'équation (E) admet donc 1 pour unique solution.

Remarque : Une autre approche possible est d'écrire que, pour $x > \frac{3}{5}$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{(E)} &\iff \ln\left((5x-3)^2\right) = \ln(10x-6) \\
&\iff \ln\left((5x-3)^2\right) - \ln(10x-6) = 0 \\
&\iff \ln\left(\frac{(5x-3)^2}{10x-6}\right) = 0 \\
&\iff \frac{(5x-3)^2}{10x-6} = 1 \\
&\iff \frac{(5x-3)}{2} = 1 \\
&\iff 5x-3 = 2 \\
&\iff 5x = 5 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit f et g définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\ln(x).$$

1. Donner le domaine de définition de f.
   La fonction f est définie (et dérivable) sur $D_f = \mathbf{R}^*$.
2. Calculer la dérivée de f.
   En écrivant que f est de la forme :
   $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
   avec $u(x) = \exp(x)$, $v(x) = x$, ($u'(x) = \exp(x)$, $v'(x) = 1$), on obtient que :
   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
   &= \frac{\exp(x)x - \exp(x) \times 1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}\exp(x).
   \end{aligned}$$
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
   On a, pour $x \in \mathbf{R}^*$:
   $$\begin{aligned}
   f'(x) = 0 &\iff \frac{x-1}{x^2}\exp(x) = 0 \\
   &\iff x - 1 = 0 \qquad \text{(puisque } \exp(x) > 0, \text{pour tout } x \\
   &\iff x = 1.
   \end{aligned}$$
4. Donner le domaine de définition de g.
   La fonction g est définie (et dérivable) sur $D_g = \mathbf{R}_+^*$.
5. Calculer la dérivée de g.
   En écrivant que f est de la forme :
   $$g(x) = u(x)v(x)$$
   avec $u(x) = x$, $v(x) = \ln(x)$, ($u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{x}$), on obtient que :
   $$\begin{aligned}
   g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
   &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.
   \end{aligned}$$

6. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
   On a, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = -1 \\ &\Longleftrightarrow x = \exp(-1). \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Suite à l'évolution de son secteur d'activité, une entreprise de 200 salariés doit restructurer ses services. Pour cela, elle procédera à des créations et suppressions de postes jusqu'au moment où elle retrouvera son effectif initial.

Il est connu en avance, qu'au bout de x mois de restructuration, l'entreprise aura créé $g(x) = 12\exp(9x - 72)$ postes et supprimé $h(x) = 27\exp(4x - 32)$ postes.

1. Donner l'expression de l'effectif $f(x)$ de l'entreprise après x mois de restructuration.
   Pour $x \geq 0$, l'effectif de l'entreprise après x mois de restructuration est donné par son effectif initial, auquel on ajoute le nombre de postes créés et on retranche le nombre de postes supprimés et s'exprime donc comme :

$$f(x) = 200 + g(x) - h(x) = 200 + 12\exp(9x - 72) - 27\exp(4x - 32).$$

2. Calculer la dérivée de la fonction f mise en évidence dans 1..
   En utilisant le fait que, si u est une fonction dérivable en x, la dŕivée de la fonction $x \longmapsto \exp(u(x))$ est donnée par $u'(x)\exp(u(x))$, on obtient que :

$$f'(x) = 108\exp(9x - 72) - 108\exp(4x - 32) = 108\left(\exp(9x - 72) - \exp(4x - 32)\right).$$

3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
   On a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 108\left(\exp(9x - 72) - \exp(4x - 32)\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \exp(9x - 72) = \exp(4x - 32) \\ &\Longleftrightarrow 9x - 72 = 4x - 32 \\ &\Longleftrightarrow 5x = 40 \\ &\Longleftrightarrow x = 8. \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbf{R}_+$.
   La même démarche que ci-dessus montre que : On a :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 8,$$

   dont on déduit le tableau de variations de f :

x	0		8		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$200 + \frac{12}{e^{72}} - \frac{27}{e^{32}}$	$\searrow$	185	$\nearrow$	$+\infty$

5. En déduire le moment auquel l'entreprise aura un effectif minimal au cours de cette restructuration ainsi que la valeur de cet effectif minimal.
   On déduit du tableau précédent que l'entreprise aura un effectif minimal après 8 mois de restructuration et que celui-ci sera de 185 employés.
6. **[Bonus]** Justifier que la restructuration prendra fin au cours du 9^{e} mois.
   La restructuration de l'entreprise prendra fin lorsqu'elle retrouvera son effectif initial, c'est-à-dire après $x > 0$ mois de restructuration avec x vérifiant $f(x) = 200$. Sur $]0, 8]$, on a $f(x) \leq f(0) < 200$. La fonction f est continue sur $[8, 9]$ et on a :
   $$f(8) = 185 < 200 \qquad \text{et} \qquad f(9) \simeq 95962,99 > 200.$$
   Le théorème des valeurs intermédiaires justifie donc que la restructuration prendra fin au cours du 9^{e} mois.