DUT GEA 1^{e} année
Mathématiques pour la gestion et statistiques, S1
Année universitaire 2019/2020

Contrôle Continu n^{o} 1

1 heure

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice **non programmable**. *Toutes les réponses doivent être justifiées.*

NOM :	Prénom :	Groupe :

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Pour chacun des produits suivants, indiquer s'il est bien défini et dans l'affirmative effectuer le calcul : AB, BM et LM. **(3 points)**

2. La matrice A est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 point)**

3. La matrice L est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 points)**

Exercice 2

Considérons le système :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 33 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 36 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(0,5 point)**

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(1 point)**

3. Résoudre le système (S). **(6,5 points)**

Exercice 3

Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 à l'aide d'une machine et de deux matières premières M_1 et M_2. La réalisation d'une unité de chaque produit nécessite une heure de temps d'utilisation de la machine.

La réalisation d'une unité de P_1 nécessite 4 unités de M_1 et 2 de M_2.

La réalisation d'une unité de P_2 nécessite 2 unités de M_1 et 1 de M_2.

La réalisation d'une unité de P_3 nécessite 3 unités de M_1 et 3 de M_2.

Pour $i = 1, 2, 3$, on note x_i le nombre de P_i produits. Pour $i = 1, 2$, on note y_i le nombre d'unités de M_i consommées et on note y_3 le nombre d'heures d'utilisation de la machine. Finalement, on pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la relation matricielle reliant X et Y. **(2 points)**

2. De quelles ressources aura-t-on besoin pour produire 5 unités de P_1, 20 unités de P_2 et 5 unités de P_3 ? **(1 point)**

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Justifier que l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 point)

4. Une semaine donnée, on dispose de 105 unités de M_1, 75 unités de M_2 et 35 heures d'utilisation de la machine. Déterminer, s'il existe, un programme épuisant ces ressources. **(1 point)**

5. Une semaine donnée, on dispose de 195 unités de M_1, 135 unités de M_2 et 35 heures d'utilisation de la machine. Déterminer, s'il existe, un programme épuisant ces ressources. **(1 point)**

Bonus (1 point)

Donner les coefficients manquants dans le produit matriciel suivant. Expliquez comment il est possible de les obtenir (sans calcul) dans le cas présent.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 20 & 7 & -16 & 14 \\ & 34 & 2 & 6 \\ & & 5 & -1 \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$