DUT GEA 1e année
Mathématiques pour la gestion et statistiques, S1
Année universitaire 2019/2020

Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Pour chacun des produits suivants, indiquer s'il est bien défini et dans l'affirmative effectuer le calcul : AB, BM et LM. **(3 points)**

Le nombre de colonnes de la matrice A, à gauche dans le produit, coïncide avec le nombre de ligne de la matrice B, à droite dans le produit, le produit AB est donc bien défini et on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times 1 + (-2)\times 0 + 1\times 2 & -8 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \\ -14 & 33 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \\ -14 & 33 & -22 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de colonnes de la matrice B, à gauche dans le produit, ne coïncide pas avec le nombre de ligne de la matrice M, à droite dans le produit, le produit BM n'est donc pas défini.
Le nombre de colonnes de la matrice L, à gauche dans le produit, coïncide avec le nombre de ligne de la matrice M, à droite dans le produit, le produit LM est donc bien défini et on a :

$$LM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{I}_2\,.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 point)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -9 \end{pmatrix} \qquad \text{(en effectuant } C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3\text{)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La matrice A n'est donc pas inversible.

3. La matrice L est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 points)**

D'après la question 1., on a $LM = 2\,\mathrm{I}_2$ soit

$$L\left(\frac{1}{2}M\right) = \mathrm{I}_2\,.$$

Par définition de l'inverse d'une matrice, ceci montre que L est inversible et que $L^{-1} = \frac{1}{2}M$.

Exercice 2

Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 3x_1 & & + & 2x_3 & = & 33 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 36 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(0,5 point)**

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 33 \\ 36 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que (S) admet une unique solution. **(1 point)**

On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(en développant le long de } L_1\text{)} \\ &= 3 \times (3 \times 1 - 1 \times (-2) + 2 \times (2 \times (-2) - 3 \times 1) = 3 \times 5 + 2 \times (-7) \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible et le système (S) admet une unique solution.

3. Déterminer la solution de (S). **(6,5 points)**

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 33 \\ 2 & 3 & 1 & 36 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right.$$

$L_1 \leftarrow L_1/3$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 36 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{3} & 14 \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} & -8 \end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2/3$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{14}{3} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} & -8 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3/(\frac{1}{9}) = 9L_3$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right.$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{9}L_3$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution de (S) est

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Alternativement, on peut déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2/3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3/(\frac{1}{9})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{9}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Puisque A est inversible, on a :

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

ce qui donne avec

$$Y = \begin{pmatrix} 33 \\ 36 \\ 3 \end{pmatrix}$$

la solution

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 à l'aide d'une machine et de deux matières premières M_1 et M_2. La réalisation d'une unité de chaque produit nécessite une heure de temps d'utilisation de la machine.

La réalisation d'une unité de P_1 nécessite 4 unités de M_1 et 2 de M_2.

La réalisation d'une unité de P_2 nécessite 2 unités de M_1 et 1 de M_2.

La réalisation d'une unité de P_3 nécessite 3 unités de M_1 et 3 de M_2.

Pour $i = 1, 2, 3$, on note x_i le nombre de P_i produits. Pour $i = 1, 2$, on note y_i le nombre d'unités de M_i consommées et on note y_3 le nombre d'heures d'utilisation de la machine. Finalement, on pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la relation matricielle reliant X et Y. **(2 points)**

On commence par écrire une équation pour chaque ressource.
Équation liée à la matière première M_1 :

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1.$$

Équation liée à la matière première M_1 :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_2.$$

Équation liée au temps d'utilisation de la machine :

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_3.$$

Pour résumer, on a obtenu le système :

$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = y_1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = y_2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = y_3 \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. De quelles ressources aura-t-on besoin pour produire 5 unités de P_1, 20 unités de P_2 et 5 unités de P_3 ? **(1 point)**

Dans ce cas, on a

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 75 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc 75 unités de M_1, 45 de M_2 et 30 heures d'utilisation de la machine.

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Justifier que l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 point)

On a :

$$A \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3,$$

ce qui montre que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Une semaine donnée, on dispose de 105 unités de M_1, 75 unités de M_2 et 35 heures d'utilisation de la machine. Déterminer, s'il existe, un programme épuisant ces ressources. **(1 point)**

Dans ce cas, on a

$$Y = \begin{pmatrix} 105 \\ 75 \\ 35 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le programme de construction recherché existe en il faut produire 10 unités de P_1, 10 de P_2 et 15 de P_3.

5. Une semaine donnée, on dispose de 195 unités de M_1, 135 unités de M_2 et 35 heures d'utilisation de la machine. Déterminer, s'il existe, un programme épuisant ces ressources. **(1 point)**

Dans ce cas, on a

$$Y = \begin{pmatrix} 195 \\ 135 \\ 35 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le programme de construction recherché n'existe pas ; on ne peut pas fabriquer un nombre négatif d'objets de type P_2.

Bonus (1 point)

Donner les coefficients manquants dans le produit matriciel suivant. Expliquez comment il est possible de les obtenir (sans calcul) dans le cas présent.

En utilisant que le produit d'une matrice par sa transposée est symétrique, on complète les coefficients manquants comme suit

$$AA^T = \begin{pmatrix} 20 & 7 & -16 & 14 \\ 7 & 34 & 2 & 6 \\ -16 & 2 & 5 & -1 \\ 14 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$