

Contrôle Continu n° 1

1 heure

*L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice **non programmable**. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

NOM :	Prénom :	Groupe :
-------	----------	----------

Exercice 1

Soient les matrices :

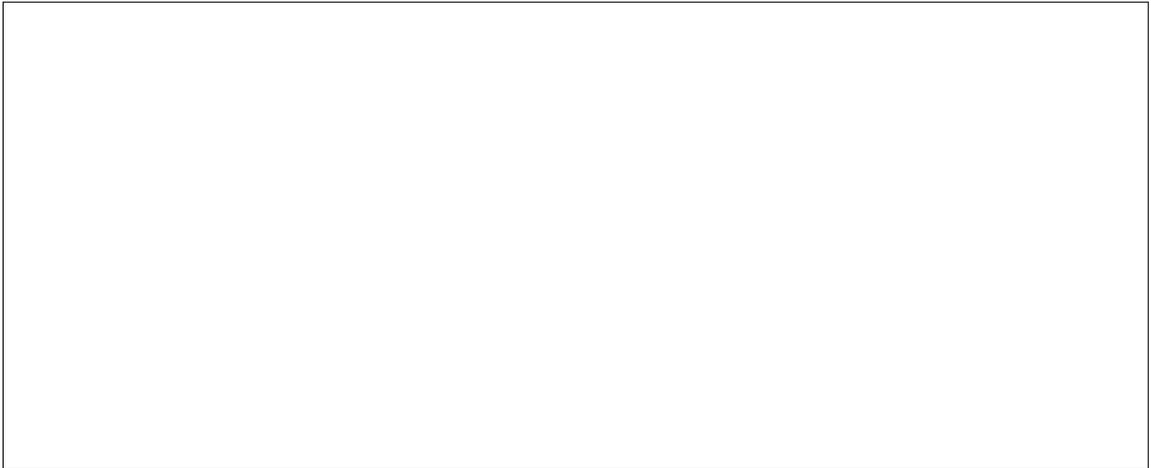
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

1. Pour chacun des produits suivants, indiquer s'il est bien défini et dans l'affirmative effectuer le calcul : AB , AS et SQ . **(3 points)**

2. La matrice A est-elle inversible? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 point)**



3. La matrice S est-elle inversible? Dans l'affirmative, donner son inverse. **(1,5 points)**

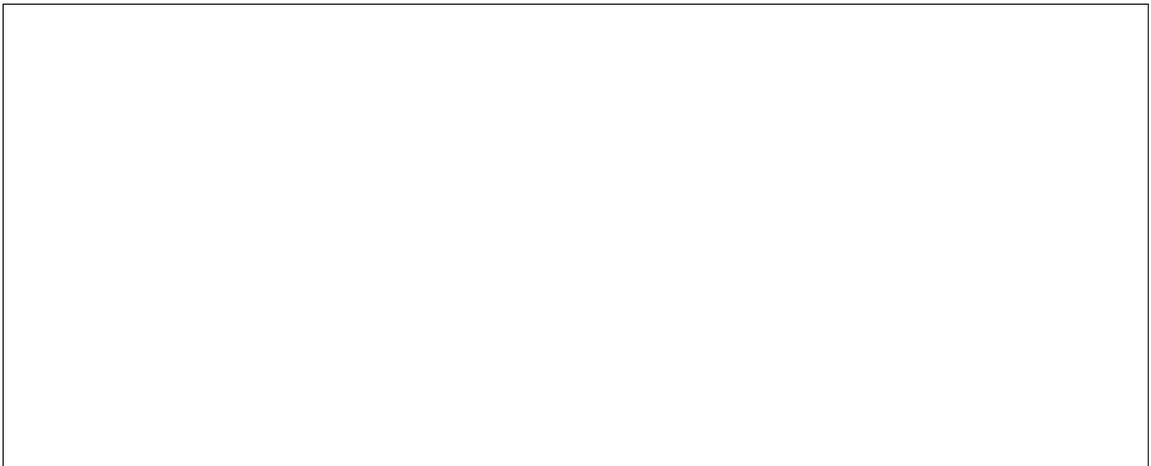


Exercice 2

Considérons le système :

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 22 \end{cases} .$$

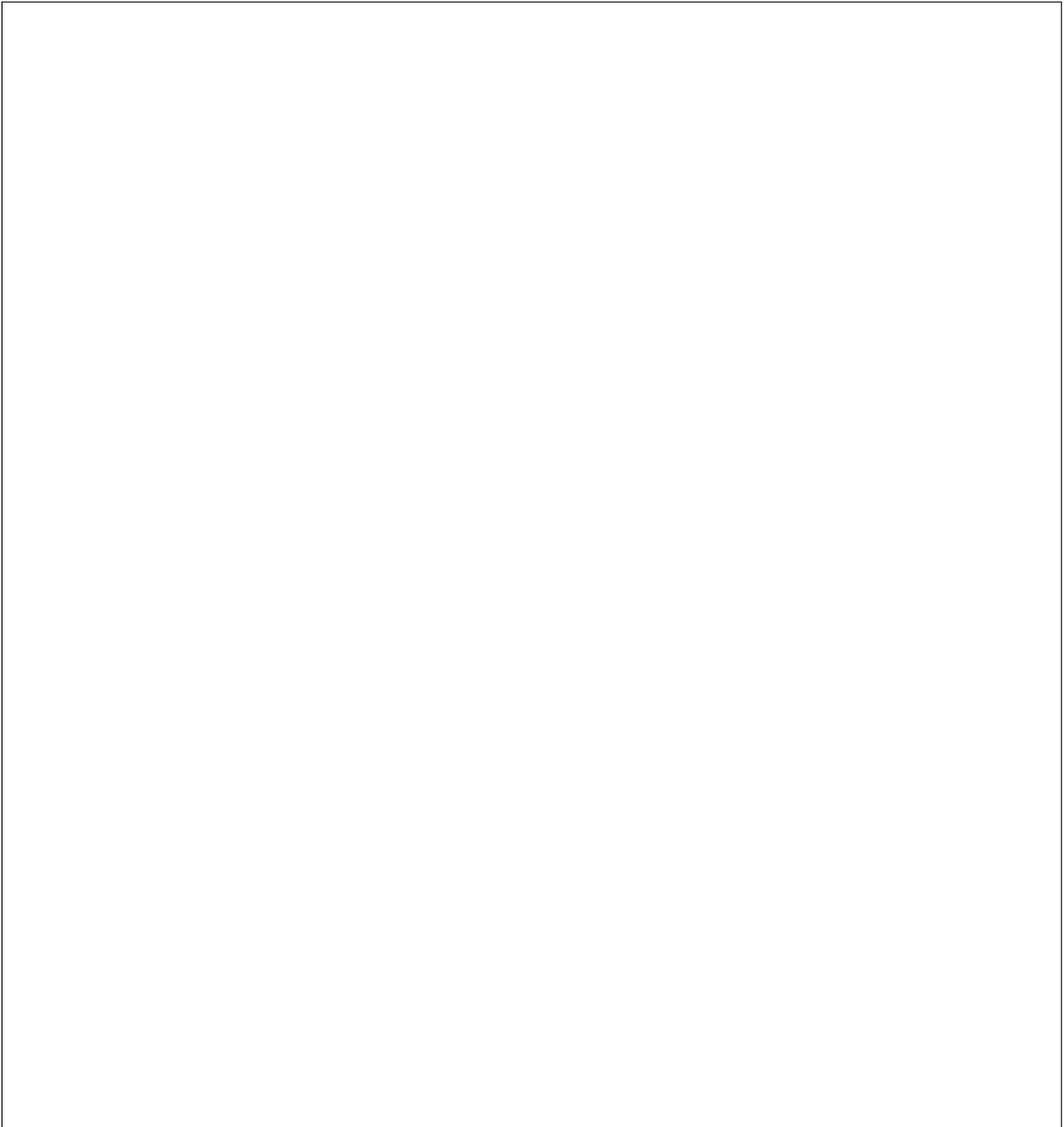
1. Donner l'écriture matricielle de (S). **(0,5 point)**

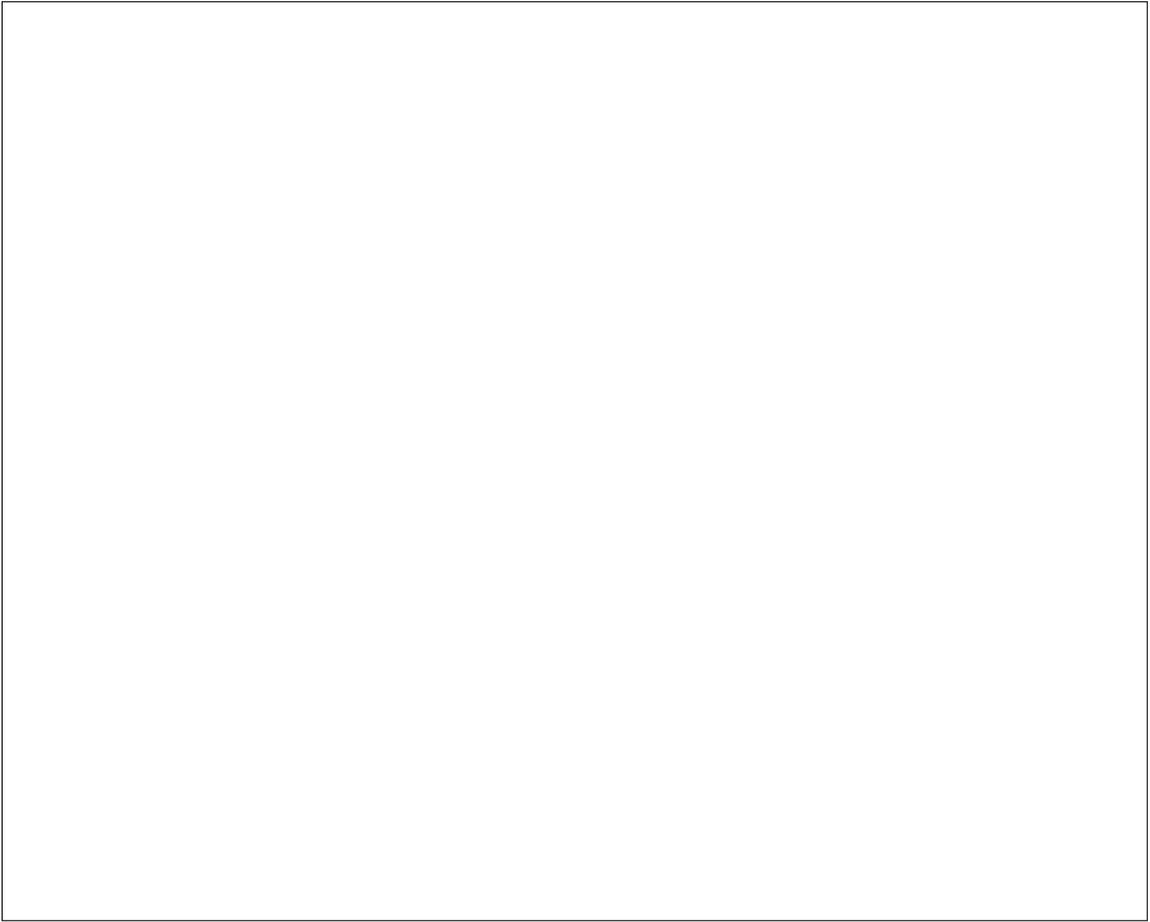


2. Justifier que (S) admet une unique solution. (1 point)

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to provide a justification for the uniqueness of the solution to system (S).

3. Résoudre le système (S). (6,5 points)

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to solve the system (S) and show the steps of the solution.



Exercice 3

Une entreprise fabrique trois produits P_1 , P_2 et P_3 à l'aide d'une machine et de deux matières premières M_1 et M_2 . La réalisation d'une unité de chaque produit nécessite une heure de temps d'utilisation de la machine.

La réalisation d'une unité de P_1 nécessite 4 unités de M_1 et 2 de M_2 .

La réalisation d'une unité de P_2 nécessite 2 unités de M_1 et 1 de M_2 .

La réalisation d'une unité de P_3 nécessite 3 unités de M_1 et 3 de M_2 .

Pour $i = 1, 2, 3$, on note x_i le nombre de P_i produits. Pour $i = 1, 2$, on note y_i le nombre d'unités de M_i consommées et on note y_3 le nombre d'heures d'utilisation de la machine. Finalement, on pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la relation matricielle reliant X et Y . (2 points)



2. De quelles ressources aura-t-on besoin pour produire 5 unités de P_1 , 20 unités de P_2 et 5 unités de P_3 ?
(1 point)

3. Soit A la matrice mise en évidence dans 1. Justifier que l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 point)

