DUT GEA 1e année
Mathématiques financières, S2
Année universitaire 2018/2019

Corrigé du Contrôle Continu nº 1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 6$.

1. Calculer u_5 et u_{30}.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_n = u_0 + nr,$$
avec ici $u_0 = 4$ et $r = 6$. Ainsi,
$$u_5 = u_0 + 5r = 4 + 5 \times 6 = 34 \qquad \text{et} \qquad u_{30} = u_0 + 30r = 4 + 30 \times 6 = 184.$$

2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 160$? Justifier.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :
$$\begin{aligned} u_n = 160 &\iff 4 + 6n = 160 \\ &\iff 6n = 160 - 4 = 156 \\ &\iff n = \frac{156}{6} = 26. \end{aligned}$$
Ainsi, $u_n = 160$ pour $n = 26$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique telle que $u_6 = 112$ et $u_{14} = 56$.

1. Déterminer la raison r puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_n = u_0 + nr,$$
et on sait, ici, $u_6 = 112$ et $u_{14} = 56$. On a donc :
$$-56 = 56 - 112 = u_{14} - u_6 = u_0 + 14r - (u_0 + 6r) = u_0 + 14r - u_0 - 6r = 8r.$$
On en déduit que la raison de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :
$$r = \frac{-56}{8} = -7.$$
Puisque $112 = u_6 = u_0 + 6r = u_0 + 6 \times (-7) = u_0 - 42$, on obtient que le terme initial de cette suite est :
$$u_0 = 112 + 42 = 154.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est (strictement) décroissante puisqu'elle est arithmétique de raison (strictement) négative.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique telle que $u_2 = 686$ et $u_5 = -2$.

1. Déterminer la raison q puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_n = u_0 q^n,$$

et on sait, ici, $u_2 = 686$ et $u_5 = -2$. On a donc :

$$-\frac{1}{343} = \frac{-2}{686} = \frac{u_5}{u_2} = \frac{u_0 q^5}{u_0 q^2} = q^3.$$

On en déduit que la raison de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

$$q = \sqrt[3]{\frac{1}{343}} = -\frac{1}{7}.$$

Puisque $686 = u_2 = u_0 q^2 = u_0 \times (-\frac{1}{7})^2 = \frac{u_0}{49}$, on obtient que le terme initial de cette suite est :

$$u_0 = 686 \times 49 = 33614.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet-elle une limite ? (Justifier). Dans l'affirmative, déterminer cette limite.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 puisqu'elle est géométrique de raison $q \in]-1,1[$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $q = 1,1$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Calculer S_4 et S_{20}.
   Rappelons que pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

   Ici, $u_0 = 3$, donc $u_1 = 3q = 3 \times 1,1 = 3,3$ et on obtient :

$$S_4 = u_1 \frac{1-q^4}{1-q} = 3,3 \frac{1-1,1^4}{1-1,1} = 15,3153$$

   et

$$S_{20} = u_1 \frac{1-q^{20}}{1-q} = 3,3 \frac{1-1,1^{20}}{1-1,1} = 189,0075.$$

2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \geq 125$?
   Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n \geq 5 &\iff 3 \times 1,1^n \geq 125 \\
&\iff 1,1^n \geq \frac{125}{3} \\
&\iff n \ln(1,1) = \ln(1,1^n) \geq \ln\left(\frac{125}{3}\right) \\
&\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{125}{3}\right)}{\ln(1,1)} \simeq 39,13 \qquad \text{(car } \ln(1,1) > 0\text{).}
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a $u_n \geq 125$ pour tout $n \geq 40$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite telle que $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{3-u_n^2}{2u_n}.$$

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer $u_{n+1}^2 - 3$ en fonction de u_n. En déduire que $u_n^2 \geq 3$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 3 &= \left(u_n + \frac{3-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 3 \\ &= u_n^2 + 2u_n \frac{3-u_n^2}{2u_n} + \left(\frac{3-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 3 \\ &= u_n^2 + 3 - u_n^2 + \left(\frac{3-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 3 = \left(\frac{3-u_n^2}{2u_n}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

dont on déduit que $u_{n+1}^2 \geq 3$. Ainsi, $u_n^2 \geq 3$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et il est immédiat de vérifier que $u_0^2 \geq 3$.

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2u_n}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{3-u_n^2}{2u_n} = \frac{2u_n^2+3-u_n^2}{2u_n} = \frac{u_n^2+3}{2u_n}.$$

3. En déduire, par récurrence sur n, que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   - **Initialisation :** On a :

   $$u_0 = 3 > 0$$

   et l'intinialisation est vérifiée.
   - **Hérédité :** Supposons que, pour un certain $n \in \mathbf{N}$, on ait :

   $$u_n \geq 0 \qquad \text{(H.R.)}$$

   et montrons qu'alors

   $$u_{n+1} \geq 0.$$

   Il est clair que $u_n^2 + 3 > 0$ et d'après (H.R.), $2u_n > 0$. On en déduit à l'aide de la question précédente que :

   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2u_n} > 0$$

   et l'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion :** La propriété :

$$u_n \geq 0 \qquad \text{(H.R.)}$$

étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, le principe du raisonnement par récurrence nous permet de conclure que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. Déduire des questions 1. et 3. que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \sqrt{3}$.
D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 > 3$ et d'après la question 3., pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$, il s'ensuit immédiatement que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \sqrt{3}$.

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{3-u_n^2}{2u_n} - u_n = \frac{3-u_n^2}{2u_n}.$$

Cette derière quantité est négative puisque l'on a vu que $u_n \geq \sqrt{3}$ (et donc $3 - u_n^2 \leq 0$). Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

6. Pourquoi peut-on affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ? Déterminer sa limite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente. Notons l sa limite et remarquons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

En passant à la limite dans la relation

$$u_{n+1} = u_n + \frac{3 - u_n^2}{2u_n},$$

on obtient que l vérifie

$$l = l + \frac{3 - l^2}{2l},$$

et donc

$$3 - l^2 = 0$$

donc $l = \pm\sqrt{3}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive, sa limite ne peut pas être strictement négative. Il s'agit donc de $\sqrt{3}$.