Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 117$ et de raison $r = -3$.

1. Calculer u_4 et u_{35}.
   Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
   $$u_n = u_0 + nr,$$
   avec ici $u_0 = 117$ et $r = -3$. Ainsi,
   $$u_4 = u_0 + 4r = 117 - 4 \times 3 = 105 \qquad \text{et} \qquad u_{35} = u_0 + 35r = 117 - 35 \times 3 = 12.$$

2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 54$? Justifier.
   Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :
   $$\begin{aligned} u_n = 54 &\iff 117 - 3n = 54 \\ &\iff 3n = 117 - 54 = 63 \\ &\iff n = \frac{63}{3} = 21. \end{aligned}$$
   Ainsi, $u_n = 54$ pour $n = 21$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique telle que $u_6 = 224$ et $u_{14} = 112$.

1. Déterminer la raison r puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
   $$u_n = u_0 + nr,$$
   et on sait, ici, $u_6 = 224$ et $u_{14} = 112$. On a donc :
   $$-112 = 112 - 224 = u_{14} - u_6 = u_0 + 14r - (u_0 + 6r) = u_0 + 14r - u_0 - 6r = 8r.$$
   On en déduit que la raison de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :
   $$r = \frac{-112}{8} = -14.$$
   Puisque $224 = u_6 = u_0 + 6r = u_0 + 6 \times (-14) = u_0 - 84$, on obtient que le terme initial de cette suite est :
   $$u_0 = 224 + 84 = 308.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est (strictement) croissante puisqu'elle est arithmétique de raison (strictement) positive.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique telle que $u_2 = -2$ et $u_5 = 686$.

1. Déterminer la raison q puis le terme initial u_0 de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:
   $$u_n = u_0 q^n,$$

et on sait, ici, $u_2 = -2$ et $u_5 = 686$. On a donc :

$$-343 = \frac{686}{-2} = \frac{u_5}{u_2} = \frac{u_0 q^5}{u_0 q^2} = q^3.$$

On en déduit que la raison de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

$$q = \sqrt[3]{-343} = -7.$$

Puisque $-2 = u_2 = u_0 q^2 = u_0 \times (-7)^2 = u_0 \times 49$, on obtient que le terme initial de cette suite est :

$$u_0 = \frac{-2}{49}.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet-elle une limite ? (Justifier). Dans l'affirmative, déterminer cette limite.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite puisqu'elle est géométrique de raison $q = -7 \leq -1$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison $q = 0,9$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Calculer S_3 et S_{25}.
   Rappelons que pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

   Ici, $u_0 = 3$, donc $u_1 = 5q = 5 \times 0,9 = 4,5$ et on obtient :

$$S_3 = u_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 4,5 \frac{1-0,9^3}{1-0,9} = 12,195$$

   et

$$S_{25} = u_1 \frac{1-q^{25}}{1-q} = 4,5 \frac{1-0,9^{25}}{1-0,9} = 41,7695.$$

2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \geq 0,1$?
   Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n \geq 0,1 &\iff 5 \times 0,9^n \geq 0,1 \\ &\iff 0,9^n \geq \frac{0,1}{5} = 0,02 \\ &\iff n \ln(0,9) = \ln(0,9^n) \geq \ln(0,002) \\ &\iff n \leq \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,9)} \simeq 37,13 \qquad \text{(car } \ln(0,9) < 0\text{)}. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a $u_n \leq 0,1$ pour tout $n \leq 38$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite telle que $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{6-u_n^2}{2u_n}.$$

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer $u_{n+1}^2 - 6$ en fonction de u_n. En déduire que $u_n^2 \geq 6$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 6 &= \left(u_n + \frac{6-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 6 \\ &= u_n^2 + 2u_n \frac{6-u_n^2}{2u_n} + \left(\frac{6-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 6 \\ &= u_n^2 + 6 - u_n^2 + \left(\frac{6-u_n^2}{2u_n}\right)^2 - 6 = \left(\frac{6-u_n^2}{2u_n}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

dont on déduit que $u_{n+1}^2 \geq 6$. Ainsi, $u_n^2 \geq 6$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et il est immédiat de vérifier que $u_0^2 \geq 6$.

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+6}{2u_n}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{6-u_n^2}{2u_n} = \frac{2u_n^2 + 6 - u_n^2}{2u_n} = \frac{u_n^2+6}{2u_n}.$$

3. En déduire, par récurrence sur n, que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   - **Initialisation :** On a :
   $$u_0 = 6 > 0$$
   et l'intinialisation est vérifiée.
   - **Hérédité :** Supposons que, pour un certain $n \in \mathbf{N}$, on ait :
   $$u_n \geq 0 \qquad \text{(H.R.)}$$
   et montrons qu'alors
   $$u_{n+1} \geq 0.$$
   Il est clair que $u_n^2 + 6 > 0$ et d'après (H.R.), $2u_n > 0$. On en déduit à l'aide de la question précédente que :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2+6}{2u_n} > 0$$
   et l'hérédité est vérifiée.

- **Conclusion :** La propriété :
$$u_n \geq 0 \qquad \text{(H.R.)}$$
étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, le principe du raisonnement par récurrence nous permet de conclure que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. Déduire des questions 1. et 3. que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \sqrt{6}$.
D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 > 6$ et d'après la question 3., pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$, il s'ensuit immédiatement que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \sqrt{6}$.

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{6-u_n^2}{2u_n} - u_n = \frac{6-u_n^2}{2u_n}.$$

Cette derière quantité est négative puisque l'on a vu que $u_n \geq \sqrt{6}$ (et donc $6 - u_n^2 \leq 0$). Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

6. Pourquoi peut-on affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ? Déterminer sa limite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente. Notons l sa limite et remarquons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

En passant à la limite dans la relation

$$u_{n+1} = u_n + \frac{6 - u_n^2}{2u_n},$$

on obtient que l vérifie

$$l = l + \frac{6 - l^2}{2l},$$

et donc

$$6 - l^2 = 0$$

donc $l = \pm\sqrt{6}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive, sa limite ne peut pas être strictement négative. Il s'agit donc de $\sqrt{6}$.