IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année TD3, 2018-2019, S2
Mathématiques financières

Corrigé du Contrôle Continu n° 2

Exercice 1 : *(3 points)*

On considère un placement de 2100€ au taux d'intérêt composé annuel de 1,2%.

1. Quelle est la valeur acquise par ce placement au bout de 10 ans ?

   Notons V_n la valeur acquise par ce placement au bout de n années et C_0 le capital placé. Puisque les intétêts sont composés, on a :
   $$V_n = C_0(1+\tau)^n = 2100 \times 1,012^n.$$
   En particulier, la valeur acquise au bout de 10 ans est :
   $$V_{10} = 2100 \times 1,012^{10} \simeq 2366,05€.$$

2. Quelle doit-être la durée minimale du placement si l'on souhaite obtenir au moins 200€ d'intérêts ?

   Avec les notations précédentes, il suffit d'écrire que :
   $$\begin{aligned} V_n \geq C_0 + 200 &\Longleftrightarrow 2100 \times 1,012^n \geq 2100 + 200 = 2300 \\ &\Longleftrightarrow 1,012^n \geq \frac{2300}{2100} = \frac{23}{21} \\ &\Longleftrightarrow n\ln(1,012) = \ln(1,012^n) \geq \ln\left(\frac{23}{21}\right) \qquad (\text{car } \ln \text{ est croissante et } \ln(a^n) = n\ln(a)) \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{23}{21}\right)}{\ln(1,012)} \simeq 7,6 \qquad (\text{car } \ln(1,012) > 0). \end{aligned}$$
   Il faut donc attendre au moins 8 ans.

Exercice 2 : *(3 points)*

Déterminer la valeur actuelle (au début de la prémière période) d'une suite de 12 annuités de 300€, versées en fin de période, au taux annuel composé de 1,9%.

On peut synthétiser l'information dans le tableau suivant :

n° de l'année k	1	...	11	12
annuité a_k	300	...	300	300
valeur de a_k au début de la 1e période	$300 \times 1,019^{-1}$	...	$300 \times 1,019^{-11}$	$300 \times 1,019^{-11}$

La valeur actuelle (au début de la prémière période) de cette suite d'annuités est donc :
$$300 \times 1,019^{-1} + \cdots + 300 \times 1,015^{-12} = 300 \times 1,019^{-1} \frac{1-1,019^{-12}}{1-1,019^{-1}} \simeq 3192,17€.$$

Exercice 3 : *(3 points)*

On considère un produit financier rémunéré au taux annuel (composé) de 2%. De 2008 à 2013, on a placé, chaque premier janvier, 200€ sur ce livret puis on a retiré 120€ de ce livret chaque année, le premier janvier, de 2014 à 2019.

De quelle somme disposait-on juste après le retrait du 01/01/2019 ?

On peut synthétiser l'information dans le tableau suivant :

année k	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
annuité a_k	200	200	200	200	200	200	-120	-120	-120	-120	-120	-120
val. cap. 01/01/2019	$200 \times 1,02^{11}$	$200 \times 1,02^{10}$	$200 \times 1,02^{9}$	$200 \times 1,02^{8}$	$200 \times 1,02^{7}$	$200 \times 1,02^{6}$	$-120 \times 1,02^{5}$	$-120 \times 1,02^{4}$	$-120 \times 1,02^{3}$	$-120 \times 1,02^{2}$	$-120 \times 1,02$	-120

Ainsi, juste après le retrait du 01/01/2019, on disposait donc de :

$$\begin{aligned}
200\times 1,02^{11}+\cdots &+200\times 1,02^{6}-120\times 1,02^{5}-\cdots-120\times 1,02-120\\
&=200\times 1,02^{6}+\cdots+200\times 1,02^{12}-\left(120+120\times 1,02+\cdots+120\times 1,02^{5}\right)\\
&=200\times 1,02^{6}\frac{1-1,02^{6}}{1-1,02}-120\frac{1-1,02^{6}}{1-1,02}\\
&\simeq 663,82€.
\end{aligned}$$

Exercice 4 : *(5 points)* On considère un emprunt indivis remboursable par le versement de 5 mensualités de fin de période d'amortissement constant égal à 200€. La première mensualité s'élève à 207€50.

1. Déterminer le capital emprunté et le taux mensuel de l'emprunt.
   On a :
   $$C_0=m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=200+200+200+200+200=1000$$
   Le capital emprunté est donc de 1000€.
   Par ailleurs, en notant $\tau_{\text{pér}}$ le taux mensuel (pÃ©riodique) de l'emprunt, on a :
   $$207,5=a_1=m_1+I_1=200+I_1=200+C_0\tau_{\text{pér}}=200+1000\tau_{\text{pér}}$$
   donc
   $$\tau_{\text{pér}}=\frac{207,5-200}{1000}=0,0075=0,75\%.$$
2. Donner le taux nominal et le taux effectif annuel de l'emprunt.
   Puisqu'il y a 12 pÃ©riodes (mois) par ans, le taux nominal de l'emprunt est :
   $$\tau_{\text{nom}}=12\tau_{\text{pér}}=12\times 0,0075=0,09=9\%$$
   et sont taux annuel effectif
   $$\tau_{\text{eff}}=(1+\tau_{\text{pér}})^{12}-1=1,0075^{12}-1\simeq 0,0938=9,38\%.$$
3. Dresser le tableau d'amortissement.
   Celui-ci prend la forme suivante.

n° du mois k	capital restant dû C_{k-1}	intérêts de la k^{e} période I_k	k^{e} amortissement m_k	k^{e} annuité a_k
1	1000	$1000\times 0,0075=7,5$	200	207,5
2	$800=1000-200$	$800\times 0,0075=6$	200	206
3	600	4,5	200	204,5
4	400	3	200	203
5	200	1,5	200	201,5

Exercice 5 : *(3 points)*

Un emprunt indivis amortissable par 15 annuités constantes est tel que le premier amortissement est égal 15000€ alors que le deuxième s'élève à 15405€.

1. Calculer le taux d'intérêt.
   Rappelons que les annuités étant constantes les amortissements vérifient :
   $$m_{k+1}=(1+\tau)m_k$$
   où τ est le taux de l'emprunt. On a donc $m_2=(1+\tau)m_1$. On en déduit que
   $$\tau=\frac{m_2}{m_1}-1=\frac{15405}{15000}-1=0,027=2,7\%.$$

2. Calculer le montant initial de l'emprunt.
   Rappelons que, pour un emprunt à annuités constantes, le premier amortissement vérifie : $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n-1}$ où n est le nombre d'annuités et C_0 le capital emprunté. Ce dernier est donc :

$$C_0 = m_1\frac{(1+\tau)^{15}-1}{\tau} = 15000\frac{1,027^{15}-1}{0,027} \simeq 272928,49€.$$

Exercice 5 : *(4 points)*

Exercice 6 : *(5 points, dont bonus)*

Pour emprunter une somme de 10000€, un particulier a le choix entre deux banques. La banque A propose de rembourser l'emprunt (et les intérêts correspondants) par un seul versement de 10200€, 3 ans après l'emprunt. La banque B propose de rembourser l'emprunt (et les intérêt correspondants) trois versements annuels consécutifs de 3400€, le premier ayant lieu 1 an après la souscription de l'emprunt.

1. Écrire l'équation définissant le TAEG T_A de la banque A.
   Il s'agit de léquation :

$$10000 = 10200(1+T_A)^{-3}.$$

2. Calculer le TAEG du prêt proposé par la banque A.
   On a :

$$\begin{aligned}10000 = 10200(1+T_A)^{-3} &\iff (1+T_A)^3 = \frac{10200}{10000} = 1,02\\ &\iff 1+T_A = \sqrt[3]{1,02}\\ &\iff T_A = \sqrt[3]{1,02}-1 \simeq 0,00662 = 0,662\%.\end{aligned}$$

3. L'objectif de cette question est de voir que le TAEG T_B du prêt proposé par la banque B est d'environ 0,997%.
   (a) Écrire l'équation définissant le TAEG T_B de la banque B.
   Il s'agit de léquation :

$$10000 = 3400(1+T_B)^{-1} + 3400(1+T_B)^{-2} + 3400(1+T_B)^{-3}.$$

   (b) On pose $f(x) = 50x^3 - 17x^2 - 17x - 17$. Donner la dérivée de f.
   Pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f'(x) = 150x^2 - 34x - 17.$$

   (c) On pose

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \qquad n \in \mathbf{N} \end{cases}.$$

   Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   On a :

$$u_1 = u_0 - \frac{50u_0^3 - 17u_0^2 - 17u_0 - 17}{150u_0^2 - 34u_0 - 17} = 1 - \frac{50\times 1^3 - 17\times 1^2 - 17\times 1 - 17}{150\times 1^2 - 34\times 1 - 17} \simeq 1,0101010.$$

   De même, $u_2 \simeq 1,00996707$, $u_3 \simeq 1,00996705$ et $u_4 \simeq 1,00996705$.

(d) On admet que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1+T_B$. En déduire une valeur approchée du TAEG T_B du prêt proposé par la banque B.

En admetant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1+T_B$, on obtient que

$$T_B \simeq u_4 - 1 \simeq 0,009967 = 0,9967\%.$$

Notons qu'il s'agit, en fait, d'une application de la méthode de Newton puisque l'on a :

$$\begin{aligned}
10000 =& 3400(1+T_B)^{-1} + 3400(1+T_B)^{-2} + 3400(1+T_B)^{-3} \\
\Longleftrightarrow & \; 50 = 17(1+T_B)^{-1} + 17(1+T_B)^{-2} + 17(1+T_B)^{-3} \\
\Longleftrightarrow & \; f(1+T_B) = 50(1+T_B)^3 - 17(1+T_B)^2 + 17(1+T_B) - 17 = 0.
\end{aligned}$$

4. Quelle banque est-il préférable de choisir ?

On s'oriente vers la banque proposant le TAEG le plus faible, c'est-à-dire la banque A.