IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2018-2019, S2

Corrigé du Contrôle Continu n° 2

Question de cours :

À quelles conditions peut-on approcher (convenablement) une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}in(n,p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'un certain paramètre λ ? Donner l'expression λ en fonction des paramètres de la loi binomiale considérée.

(/2 $(4\times 0,5)$) Cette approximation peut être réalisée si $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$. On a alors $\lambda = np$.

Exercice 1 :

On dispose de 2 lots de 10 ampoules électriques chacun. Le premier contient 2 ampoules défectueuses, le second, 5.

On tire une ampoule du premier lot et 2 du second.

Quelle est la probabilité que sur ces trois ampoules, exactement une soit défectueuse ?

(/3) On peut répondre à cette question en utilisant l'une des deux méthodes suivantes.

Méthode 1 : Considérons l'ensemble Ω des tirages (équiprobables) de 3 ampoules, la première étant tirée du lot 1, les deux autres du lot 2. On a :

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_{10}^1 \times \mathbf{C}_{10}^2 = \frac{10!}{1!\times 9!}\frac{10!}{2!\times 8!} = 450.$$

Notons A l'ensemble de ces tirages contenant exactement une ampoule défectueuse. Pour réaliser un tel tirage, soit on a tiré une des 2 ampoules défectueuses du lot 1 et 2 des 5 ampoules non défectueuses du lot 2, soit on a tiré une des 8 ampoules non défectueuses du lot 1, une des 5 ampoules défectueuses du lot 2 et une des 5 ampoules non défectueuses du lot 2. On a donc :

$$p = \mathrm{Card}(A) = \mathbf{C}_2^1 \times \mathbf{C}_5^2 + \mathbf{C}_8^1 \times \mathbf{C}_5^1 \times \mathbf{C}_5^1 = \frac{22}{45}.$$

Méthode 2 : Notons D_i l'événement "la i^{e} ampoule tirée est défectueuse", la première étant tirée du lot 1, les deux autres du lot 2. La probabilité p recherchée est :

$$p = \mathbb{P}\left[(D_1 \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}) \cup (\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3)\right].$$

Les unions étant disjointe, on obtient que :

$$p = \mathbb{P}\left[D_1 \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3}\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3\right].$$

L'événement D_1 étant indépendant des événements D_2 et D_3 (ainsi que leurs complémentaires), on obtient que :

$$p = \mathbb{P}[D_1]\,\mathbb{P}\left[\overline{D_2} \cap \overline{D_3}\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1}\right]\mathbb{P}\left[D_2 \cap \overline{D_3}\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1}\right]\mathbb{P}\left[\overline{D_2} \cap D_3\right].$$

Finalement, en utilisant les probabilités conditionnelles, on obtient que :

$$\begin{aligned}
p &= \mathbb{P}[D_1]\,\mathbb{P}\left[\overline{D_2}\right]\mathbb{P}\left[\overline{D_3}|\overline{D_2}\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1}\right]\mathbb{P}[D_2]\,\mathbb{P}\left[\overline{D_3}|D_2\right] + \mathbb{P}\left[\overline{D_1}\right]\mathbb{P}\left[\overline{D_2}\right]\mathbb{P}\left[D_3|\overline{D_2}\right]\\
&= \frac{2}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{9} + \frac{8}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{5}{9} + \frac{8}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\\
&= \frac{22}{45}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Une compagnie d'assurance a réparti ses assurés en trois catégories : conducteurs à faible risque, risque moyen, haut risque. Une étude a montré que pour ces catégories les probabilités de sinistre sur une période d'un an sont respectivement $0,5\%$, 12% et 48%. On sait que 25% des conducteurs sont à faible risque et 50% à risque moyen. On choisit au hasard un assuré de la compagnie.

Notons F (resp. M, H) l'événement "l'assuré est à faible risque (resp. risque moyen, haut risque)" et S l'événement "l'assuré a eu un sinistre dans l'annÃ©e".

D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}[S|F] = 0,005, \qquad \mathbb{P}[S|M] = 0,12, \qquad \mathbb{P}[S|H] = 0,48, \qquad \mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[H] = 0,25 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[M] = 0,5.$$

1. Sachant qu'il a eu un accident dans l'année, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un conducteur à haut risque ?

   (/2) Cette probabilité est :

   $$\mathbb{P}[H|S] = \frac{\mathbb{P}[H \cap S]}{\mathbb{P}[S]} = \frac{\mathbb{P}[H]\mathbb{P}[S|H]}{\mathbb{P}[S]}.$$

   Or, d'après la formule des probabilités totales (version "conditionnelle"), on a :

   $$\mathbb{P}[S] = \mathbb{P}[S|F]\mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[S|M]\mathbb{P}[M] + \mathbb{P}[S|H]\mathbb{P}[H] = 0,005 \times 0,25 + 0,12 \times 0,5 + 0,48 \times 0,25 = 0,18125.$$

   Ainsi,

   $$\mathbb{P}[H|S] = \frac{\mathbb{P}[H]\mathbb{P}[S|H]}{\mathbb{P}[S]} = \frac{0,48 \times 0,25}{0,18125} \simeq 0,6621.$$

2. Sachant qu'il n'a pas eu d'accident dans l'année, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un conducteur à faible risque ?

   (/1,5) Cette probabilité est :

   $$\mathbb{P}[F|\overline{S}] = \frac{\mathbb{P}[F \cap \overline{S}]}{\mathbb{P}[\overline{S}]} = \frac{\mathbb{P}[F](1 - \mathbb{P}[S|F])}{1 - \mathbb{P}[S]} = \frac{0,25 \times (1 - 0,005)}{1 - 0,18125} \simeq 0,3038.$$

Exercice 3 :

Un voyageur fraude systématiquement en empruntant le train. Il réalise 10 voyages par semaine. Le billet est vendu 20 euros l'unité et, en cas de non présentation du billet lors d'un contrôle, la contravention est de 90 euros. Une proportion p des trains est contrôlée. Le choix des trains contrôlés est fait aléatoirement et indépendamment.

1. On note N le nombre de contraventions que le voyageur reçoit en une semaine. Quelle est la loi de N ? (justifier)

   (/1,5) Pour $i = 1, \ldots, 10$, notons X_i la variable aléatoire (v.a.) valant si le voyageur reçoit une contravention lors de son i^{e} voyage de la semaine et 0 sinon. D'après l'énoncé, $X_i \sim \mathscr{B}er(p)$ et les X_i sont supposées indépendantes. On en déduit que le nombre $N = X_1 + \cdots + X_{10}$ de contraventions que le voyageur reçoit en une semaine suit la loi $\mathscr{B}in(10, p)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs de p le voyageur peut espérer être gagnant en fraudant systématiquement.

   (/1) Le voyageur peut espérer être gagnant en fraudant systématiquement si le montant moyen payé en contraventions en une semaine est inférieur au montant qu'il aurait payé en billets, c'est-à-dire si :

   $$\mathbb{E}[90N] < 20 \times 10.$$

   Or cette inégalité est équivalente à $900p < 200$, soit encore $p < 2/9$.

3. Si 1/3 des trains sont contrôlés, avec quelle probabilité le voyageur recevra-t-il au moins une contravention ?
   (/1) On suppose maintenant que $p = 1/3$ et on calcule :

$$\mathbb{P}[N \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[N = 0] = 1 - \mathbf{C}_{10}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{10} = 1 - \frac{1024}{59049} \simeq 0,9827.$$

4. On suppose que 40% des trains sont controlés. On note X le numéro du trajet durant lequel le voyageur reçoit sa première contravention de la semaine.
   (a) Quelle est la loi de X ? (Justifier).
   (/1,5) La v.a. X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succès (ici, "recevoir une contravention" !) lorsque l'on répète indépendament la même expérience de Bernoulli de probabilité de succès 0,4. On a donc $X \sim \mathscr{G}eo(0,4)$
   (b) Quelle est la probabilité pour que le voyageur reçoive une seule contravention durant la semaine et ce lors de son dernier trajet ?
   (/1) Il s'agit de :

$$\mathbb{P}[X = 10] = (1-0,4)^{9} \times 0,4 \simeq 0,0040.$$

Exercice 4 :

On a observé sur une ligne aérienne qu'en moyenne 5% des clients ayant acheté un billet ne se présentent pas au départ. Les avions utilisés sur cette ligne ont 98 places. Pour chaque vol, on délivre 100 billets. Quelle est le risque qu'il n'y ait pas de place pour tous les passagers se présentant au départ ?

(/3) Pour $i = 1, \ldots, 100$, définissons la v.a. X_i valant 1 si le détenteur du i^{e} billet ne se présente pas au départ et 0 sinon. D'après l'énoncé, $X_i \sim \mathscr{B}er(0,05)$ et les X_i sont supposées indépendantes. On en déduit que le nombre $N = X_1 + \cdots + X_{100}$ de voyageurs ne se présentant pas au départ suit la loi $\mathscr{B}in(100, 0,05)$. Puisqu'il n'y a que 98 places dans l'avion, il n'y aura pas assez de place pour tous si ce nombre N est inférieur ou égal á 1, ce qui arrive avec probabilité :

$$\mathbb{P}[N \leq 1] = \mathbb{P}[N = 0] + \mathbb{P}[N = 1] = \mathbf{C}_{100}^{0} 0,05^{0}(1-0,05)^{100} + \mathbf{C}_{100}^{1} 0,05^{1}(1-0,05)^{99} \simeq 0,0371.$$

Remarque : Alternativement, après avoir vérifié les conditions ($n = 100 \geq 30$, $p = 0,05 \leq 0,1$ et $np = 5 \leq 10$) rappelées dans la question de cours, on peut utiliser l'approximation de N par $Y \sim \mathscr{P}(5)$, qui fournit l'approximation suivante de la probabilité recherchée :

$$\mathbb{P}[Y \leq 1] = \mathbb{P}[Y = 0] + \mathbb{P}[Y = 1] = \exp(-5)\frac{5^0}{0!} + \exp(-5)\frac{5^1}{1!} = 6\exp(-5) \simeq 0,0404.$$

Les deux méthodes permettent de conclure que le risque qu'il n'y ait pas assez de place pour tout le monde au départ est de 4% environ.

Exercice 5 :

Le standard téléphonique d'une entreprise compte deux plateformes. La plateforme A est dédiée au souscriptions de contrats et la plateforme B au service après vente. Le nombre d'appels reçus par heure par chacune de ces plateforme est distribué selon une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_A = 10$ pour la plateforme A et $\lambda_B = 3$ pour la plateforme B.

Notons X_A (resp. X_B) la v.a. comptant le nombre d'appels reçus par la plateforme A (resp. B). On a donc $X_A \sim \mathscr{P}(10)$ et $X_B \sim \mathscr{P}(3)$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'en une heure aucun client n'appelle le service après vente ?
   (/1) Le service après vente est la plateforme B. Il s'agit donc de :

$$\mathbb{P}[X_B = 0] = \exp(-3)\frac{3^0}{0!} = \exp(-3) \simeq 0,0498.$$

2. Quelle est la probabilité pour qu'en une heure au moins 4 personnes appellent pour souscrire un contrat ?
   (/1) Le service de souscription de contrats est la plateforme A. Il s'agit donc de :

$$\mathbb{P}[X_A \geq 4] = 1 - \mathbb{P}[X_A \leq 3] = 1 - \exp(-10)\left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!}\right) = 1 - \frac{683}{3}\exp(-10) \simeq 0,9897.$$

3. On note T le nombre total d'appels reçus par le standard en une heure. Quelle est la loi de T ?
   (/0,5) En utilisant le rappel ci-dessous, on obtient que $T = X_A + X_B$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_T = \lambda_A + \lambda_B = 10 + 3 = 13$ comme somme de deux v.a. de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_A = 10$ et $\lambda_B = 3$
4. Quel est le nombre moyen d'appels reçus par le standard en une heure ?
   (/1) Il s'agit de $\mathbb{E}[T] = \lambda_T = 13$.
5. Quelle est la probabilité pour qu'en une heure aucun appel ne soit reçu par le standard (plateforme A ou B) ?
   (/1) Il s'agit de :

$$\mathbb{P}[X_T = 0] = \exp(-13)\frac{13^0}{0!} = \exp(-13) \simeq 0,000002260.$$

<u>Note :</u> on supposera que les clients décident d'appeler ou non le standard indépendamment les uns des autres ; en particulier, le nombre d'appels reçus par la plateforme A est indépendant du nombre d'appels reçus par la plateforme B.

<u>Rappel :</u> on rappelle que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.