

Contrôle Continu n° 3

Durée : 1h25

*Le seul document autorisé est le formulaire distribué en CM portant les limites usuelles, comparaisons de limites et dérivées usuelles. Son utilisation n'est autorisée que s'il n'est pas annoté. L'usage de tout autre document ou dispositif électronique est interdit à l'exception de celui de la calculatrice **non programmable**. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Le barème mentionné est indicatif et susceptible d'être modifié.*

Questions de cours : (3 points)

1. Soient u, v deux fonction dérivables. Donner l'expression des dérivées de $u \times v$ et de $\ln(u(\cdot))$ en un point x tel que $u(x) > 0$.
2. Soit f une fonction dérivable en x_0 . Rappeler l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 .

Exercice 1 : (3,5 points) On considère le système :

$$(S) \begin{cases} \exp(x-1) \exp(y-3) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(8y) = \ln(12) \end{cases} .$$

1. Déterminer le domaine de définition de (S).
2. Résoudre (S).

Exercice 2 : (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = (12x + 4) \exp(-3x + 2).$$

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f'(x) > 0$? (justifier)

Exercice 3 : (4,5 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 8}{2x - 3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer la dérivée de f .
3. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 4 : (5,5 points)

Une entreprise fabrique un seul produit vendu 30€ l'unité. Les frais fixes de l'entreprise s'élèvent à 800€ par jour. On note x le nombre d'unités produites quotidiennement. Le coût de la production de x unités en une journée est :

$$\frac{30}{1 + \ln(750)} x \ln(x).$$

1. Sachant que la demande sera suffisante pour vendre l'intégralité des produits fabriqués, exprimer en fonction de la quantité produite $x > 0$, le bénéfice quotidien $b(x)$ de l'entreprise.
2. Calculer la dérivée de la fonction b mise en évidence dans 1..
3. Résoudre l'équation $b'(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de b .
5. En déduire le nombre d'unités que doit produire, chaque jour, l'entreprise pour maximiser son bénéfice quotidien. Quel sera alors le bénéfice quotidien de cette entreprise ?

Note : *Il convient de faire attention au fait que $\ln(750) \approx 6,6201$ est une constante.*

Bonus : (1 point)

Soit f une fonction telle que $f(10) = 4$ et $f'(10) = 5$.

Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 10 et en déduire une approximation de la valeur de $f(10,2)$.