IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2019-2020, S1

Corrigé du Contrôle Continu n° 3

Questions de cours : (3 points)

1. Soient u, v deux fonction dérivables. Donner l'expression des dérivées de $u \times v$ et de $\ln(u(\cdot))$ en un point x tel que $u(x) > 0$.
   On a :
   $$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
   et
   $$(\ln(u(\cdot))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

2. Soit f une fonction dérivable en x_0. Rappeler l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0.
   Il s'agit de :
   $$T_{f,x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exercice 1 : (3,5 points) On considère le système :

$$(S) \begin{cases} \exp(x-1)\exp(y-3) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(8y) = \ln(12) \end{cases} .$$

1. Déterminer le domaine de définition de (S).
   Le système (S) est bien défini si, et seulement si :
   $$\frac{x}{2} > 0 \qquad \text{et} \qquad 8y > 0$$
   c'est-à-dire, si, et seulement si :
   $$x > 0 \qquad \text{et} \qquad y > 0.$$
   Son domaine de définition est donc :
   $$D = \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2.$$

2. Résoudre (S).
   En utilisant les propriétés des fonctions exp et ln, on obtient que pour $(x, y) \in D$:
   $$\begin{aligned}
   (S) \begin{cases} \exp(x-1)\exp(y-3) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(8y) = \ln(12) \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} \exp(x-1+y-3) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2} \times 8y\right) = \ln(12) \end{cases} \\
   &\Longleftrightarrow \begin{cases} \exp(x+y-4) = \exp(0) \\ \ln(4xy) = \ln(12) \end{cases} \\
   &\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-4 = 0 \\ 4xy = 12 \end{cases} \\
   &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4-x \\ xy = \frac{12}{4} = 3 \end{cases} \\
   &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4-x \\ x(4-x) - 3 = 0 \end{cases} \\
   &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4-x \\ -x^2 + 4x - 3 = 0 \end{cases}
   \end{aligned}$$

On détermine les solutions de la seconde équations du dernier système en calculant son discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4.$$

On obtient que ces solutions sont :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 1,$$

toutes deux strictement positives.
En utilisant, la première équation du dernier système, on obtient que correspond Ã $x_1 = 3$:

$$y_1 = 4 - x_1 = 4 - 3 = 1 > 0.$$

De même, on obtient que correspond Ã $x_2 = 1$:

$$y_2 = 4 - x_2 = 4 - 2 = 3 > 0.$$

Ainsi, les couples $(x_1; y_1) = (3; 1)$ et $(x_2; y_2) = (1; 3)$ appartiennent à D et sont les solutions de (S).

Exercice 2 : (3,5 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (12x + 4)\exp(-3x + 2).$$

1. Déterminer la dérivée de f.
En utilisant les formules de dérivées d'un produit et d'une composée, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12\exp(-3x+2) + (12x+4) \times (-3)\exp(-3x+2) \\ &= (12 + (12x+4) \times (-3))\exp(-3x+2) \\ &= (12 - 36x - 12)\exp(-3x+2) \\ &= -36x\exp(-3x+2). \end{aligned}$$

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f'(x) > 0$? (justifier)
On a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -36x\exp(-3x+2) > 0 \\ &\iff -36x > 0 \\ &\iff x < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $x < 0$.

Exercice 3 : (4,5 points)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 8}{2x - 3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
La fonction f est bien définie si, et seulement si :

$$2x - 3 \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$x \neq \frac{3}{2}.$$

Son domaine de définition est donc $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

2. Déterminer la dérivée de f.
   En utilisant la formule de dérivée d'un quotient, pour $x \in D$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-3)(2x-3)-(2x^2-3x+8)\times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{8x^2-6x-12x+9-4x^2+6x-16}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{4x^2-12x-7}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

3. Dresser le tableau de variations de f.
   Notons que $f'(x)$ est du signe de $4x^2-12x-7$ dont le discriminant est :

$$\Delta = (-12)^2 - 4\times 4\times(-7) = 256 = 16^2.$$

   Ce polynôme admet pour racines :

$$x_1 = \frac{12-16}{2\times 4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{12+16}{2\times 4} = \frac{7}{2}$$

   et est du signe du coefficient de son monôme de degré deux à l'extérieur de ces racines.
   On obtient donc le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}$			$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		‖		$-$	0	$+$	
f			$-\frac{5}{2}$			‖	$+\infty$				$+\infty$
		↗		↘		‖		↘		↗	
	$-\infty$				$-\infty$	‖			$\frac{11}{2}$		

Exercice 4 : (5,5 points)

Une entreprise fabrique un seul produit vendu 30€ l'unité. Les frais fixes de l'entreprise s'élèvent à 800€ par jour. On note x le nombre d'unités produites quotidiennement. Le coût de la production de x unités en une journée est :

$$\frac{30}{1+\ln(750)}x\ln(x).$$

1. Sachant que la demande sera suffisante pour vendre l'intégralité des produits fabriqués, exprimer en fonction de la quantité produite $x>0$, le bénéfice quotidien $b(x)$ de l'entreprise.
   Le bénéfice quotidien de l'entreprise produisant (et vendant) $x>0$ unités ce compose du montant des ventes $30x$€ auquel on retranche les frais fixes quotidiens 800€ et le coût de la production des x unités $\frac{30}{1+\ln(750)}x\ln(x)$.
   Ce bénéfice s'exprime donc comme :

$$b(x) = 30x - 800 - \frac{30}{1+\ln(750)}x\ln(x) \qquad x>0.$$

2. Calculer la dérivée de la fonction b mise en évidence dans 1..
   En utilisant les formules habituelles de dérivation (en particulier celle d'un produit), on obtient que pour $x>0$:

$$b'(x) = 30 - \frac{30}{1+\ln(750)}\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = 30 - \frac{30}{1+\ln(750)}(\ln(x)+1).$$

3. Résoudre l'équation $b'(x) = 0$.

   On a pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} b'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 30 - \frac{30}{1+\ln(750)}(\ln(x)+1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{1+\ln(750)}(\ln(x)+1) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x)+1 = 1+\ln(750) \\ &\Longleftrightarrow x = 750. \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de variation de b. Le tableau de variations de b prend donc la forme suivante.

x	0		750		∞
$b'(x)$	||	$+$	0	$-$	
b	|| -800	$\nearrow$	$b(750)$	$\searrow$	$-\infty$

5. En déduire le nombre d'unités que doit produire, chaque jour, l'entreprise pour maximiser son bénéfice quotidien. Quel sera alors le bénéfice quotidien de cette entreprise ?

   On déduit du tableau de variations précédent que le nombre d'unités que doit produire, chaque jour, l'entreprise pour maximiser son bénéfice quotidien est 750. Son bénéfice quotidien sera alors de :

$$b(750) \simeq 2152,73 €.$$

<u>Note :</u> *Il convient de faire attention au fait que* $\ln(750) \simeq 6,6201$ *est une constante.*

Bonus : (1 point)

Soit f une fonction telle que $f(10) = 4$ et $f'(10) = 5$.

Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 10 et en déduire une approximation de la valeur de $f(10,2)$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 10 est :

$$T_{f,10} : y = f'(10)(x-10) + f(10) = 5(x-10) + 4 = 5x - 46.$$

On en déduit une approximation de la valeur de $f(10,2)$:

$$f(10,2) \simeq 5 \times 10,2 - 46 = 5.$$