Compléments autour de la Leçon 3

1 Préparation à l'oral

Exercice 1 On définit une variable aléatoire binomiale N de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0;1]$ comme étant le nombre de succès obtenus en répétant n fois indépendamment une expérience de Bernoulli de paramètre p.

Montrer que, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbf{P}[N = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et que $\mathbf{E}[N] = np$ et $\mathbf{V}[N] = np(1-p)$.

Exercice 2

1. Est-il possible de définir une v.a. discrète sur un espace probabilisé avec Ω non dénombrable ?
2. Est-il vrai que toute v.a. discrète peut être définie sur un espace probabilisé avec Ω fini ?

Exercice 3 Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Montrer que $\mathbf{E}[X]$ minimise la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(s) = \mathbf{E}[(X-s)^2], \qquad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Exercice 4

Énoncer et montrer :

1. la formule de Kœning ;
2. l'inégalité de Markov ;
3. l'inégalité de Tchebychev ;
4. l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
5. la loi faible des grands nombres.

Exercice 5 Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0;1]^{\mathbf{N}}$ telle np_n converge vers un certain $\lambda > 0$. Soit aussi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n une v.a. de loi Binomiale de paramètres n et p_n. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de v.a. définies par $X_0 \sim \mathcal{B}er\,(p)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 0 \\ 0 & \text{si } X_n = 1 \end{cases}.$$

1. On suppose que $p = \frac{1}{2}$.
   (a) Déterminer la loi de X_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) Les $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, pour tout $n \in \mathbf{N}$
   (d) La moyenne empirique des n premières v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge-t-elle vers $\frac{1}{2}$? Si oui, en quel sens et pourquoi ?

2. On considère maintenant le cas général $p \in [0, 1]$.
   (a) Déterminer la loi de X_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en discutant la parité de n.
   (b) La moyenne empirique des n premières v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge-t-elle vers une constante ? Si oui, laquelle, en quel sens et pourquoi ?

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de v.a. définies par $X_0 \sim \mathcal{B}er\,(p)$, $p \in]0; 1[$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 0 \\ 0 & \text{si } X_n = 1 \end{cases} .$$

1. Déterminer la loi de X_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en discutant de la parité de n.
2. Montrer que les $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne sont pas indépendantes.
3. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en discutant de la parité de n.
4. Pour quelles raison ne peut-on pas appliquer la loi des grands nombres pour étudier la moyenne empirique des n premières v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ dans ce contexte.
5. Montrer que $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge vers $\frac{1}{2}$ p.s..

Exercice 8

Chaque année, entre le 9 et le 13 août, la Terre traverse les Perséides. Il s'agit d'un essaim de météores constitué de très nombreux débris de la comète Swift-Tuttle. Chacun de ces météores peut, en entrant dans l'atmosphère, donner lieu à un phènomène lumineux bien connu : une étoile filante. Il est connu que durant cette période, on peut observer en moyenne 100 étoiles filantes par heure.

On note Y le nombre d'étoiles filantes que l'on pourra observer le 10 août 2020 entre 1h et 1h05 du matin. Déterminer la loi de Y.

2 Entraînement à l'écrit

Rédiger la solution de la Partie C du Problème n° 2 de l'Épreuve 1 de 2019.