

Compléments autour de la Leçon 4

1 Préparation à l'oral

Exercice 1

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une v.a. uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 2

Soit $\lambda > 0$. Rappeler une expression de la densité de la loi exponentielle de paramètre λ , justifier qu'il s'agit bien d'une densité et déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une v.a. exponentielle de paramètre λ .

Exercice 3

La fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle une densité? Dans l'affirmative, déterminer la fonction de répartition d'une v.a. de densité f . Cette v.a. admet-elle une espérance?

Exercice 4

La fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]0;1] \cup]2;3]}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle une densité? Dans l'affirmative, déterminer la fonction de répartition d'une v.a. de densité f . Cette v.a. admet-elle une espérance?

Exercice 5

La fonction définie sur \mathbf{R} par

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathbf{1}_{]0;1]}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle la fonction de répartition d'une v.a. à densité? Dans l'affirmative, donner l'expression d'une densité de cette v.a..

Exercice 6

La fonction définie sur \mathbf{R} par

$$F(x) = x \mathbf{1}_{]0; \frac{1}{2} \cup] \frac{3}{4}; 1]}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle la fonction de répartition d'une v.a. à densité? Dans l'affirmative, donner l'expression d'une densité de cette v.a..

Exercice 7

Soient $m \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 \in \mathbf{R}_+^*$ et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $Z := \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 8

Montrer qu'une v.a. presque sûrement positive X à densité est sans mémoire, c'est-à-dire vérifie :

$$\mathbf{P}_{\{X>t\}} [X > t + s] = \mathbf{P} [X > s], \quad \forall s, t > 0$$

si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 9

Montrer que si 2 v.a. admettant un moment d'ordre 2 sont indépendantes alors

$$\mathbf{V}[X + Y] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y].$$

Est-il possible d'assouplir l'hypothèse d'indépendance ?

Exercice 10

Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une v.a. X_n de loi uniforme (discrète) sur $\{\frac{k}{n} : k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 11

Soit le graphe $\mathbb{L}_d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}_d)$ avec $\mathbb{E}_d = \{\{z, z'\} : \|z - z'\| = 1\}$. On appelle *processus de percolation par arête* de paramètre $p \in [0, 1]$ sur \mathbb{L}_d la collection $\{X(e)\}_{e \in \mathbb{E}_d}$ où les $X(e)$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}er(p)$. En considérant une arête e ouverte si $X(e) = 1$ et fermée sinon, on définit l'amas contenant l'origine comme :

$$C(0) = \{z \in \mathbb{Z}^d : \text{il existe un chemin entre } 0 \text{ et } z \text{ ne contenant que des arêtes ouvertes}\}.$$

Montrer que la fonction *probabilité de percolation* $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $\theta(p) = \mathbb{P}_p[\#C(0) = +\infty]$ est croissante.

2 Entraînement à l'écrit

Rédiger la solution de la Partie D du Problème n° 2 de l'Épreuve 1 de 2019.