Compléments autour de la Leçon 4

1 Préparation à l'oral

Exercice 1

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une v.a. uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 2

Soit $\lambda > 0$. Rappeler une expression de la densité de la loi exponentielle de paramètre λ, justifier qu'il s'agit bien d'une densité et déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une v.a. exponentielle de paramètre λ.

Exercice 3

La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle une densité ? Dans l'affirmative, déterminer la fonction de répartition d'une v.a. de densité f. Cette v.a. admet-elle une espérance ?

Exercice 4

La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{]0;1]\cup[2;3]}(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle une densité ? Dans l'affirmative, déterminer la fonction de répartition d'une v.a. de densité f. Cette v.a. admet-elle une espérance ?

Exercice 5

La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathbf{1}_{]0;1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle la fonction de répartition d'une v.a. à densité ? Dans l'affirmative, donner l'expression d'une densité de cette v.a..

Exercice 6

La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F(x) = x\mathbf{1}_{]0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{4};1[}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[\frac{1}{2};\frac{3}{4}]}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

est-elle la fonction de répartition d'une v.a. à densité ? Dans l'affirmative, donner l'expression d'une densité de cette v.a..

Exercice 7

Soient $m \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 \in \mathbf{R}_+^*$ et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $Z := \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 8

Montrer qu'une v.a. presque sûrement positive X à densité est sans mémoire, c'est-à-dire vérifie :

$$\mathbf{P}_{\{X>t\}}\left[X > t+s\right] = \mathbf{P}\left[X > s\right], \qquad \forall s, t > 0$$

si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 9

Montrer que si 2 v.a. admettant un moment d'ordre 2 sont indépendantes alors

$$\mathbf{V}[X+Y] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y].$$

Est-il possible d'assouplir l'hypothèse d'indépendance ?

Exercice 10

Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une v.a. X_n de loi uniforme (discrète) sur $\{\frac{k}{n} : k \in [\![1; n]\!]\}$. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 11

Soit le graphe $\mathbb{L}_d = \left(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}_d\right)$ avec $\mathbb{E}_d \left\{\{z, z'\} : \|z - z'\| = 1\right\}$. On appelle *processus de percolation par arête* de paramètre $p \in [0,1]$ sur $\mathbb{L}_d$ la collection $\{X(e)\}_{e\in\mathbb{E}_d}$ où les $X(e)$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}er(p)$. En considérant une arête e ouverte si $X(e) = 1$ et fermée sinon, on définit l'amas contenant l'origine comme :

$$C(0) = \{z \in \mathbb{Z}^d : \text{il existe un chemin entre 0 et } z \text{ ne contenant que des arêtes ouvertes}\}.$$

Montrer que la fonction *probabilité de percolation* $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par $\theta(p) = \mathbb{P}_p[\#C(0) = +\infty]$ est croissante.

2 Entraînement à l'écrit

Rédiger la solution de la Partie C du Problème n° 2 de l'Épreuve 1 de 2019.