Université de Bourgogne
Année universitaire 2022-2023

M1 MEEF
Parcours Mathématiques

Compléments autour de la Leçon 42

Exercice 1

Écrire les négations des propositions suivantes.

1. $P \Rightarrow Q$
2. $P \Leftrightarrow Q$
3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} :\ \forall n, m \geq n_0, |u_n - u_m| < \varepsilon$
4. $\forall n \geq 0,\ \exists k \geq n :\ \omega \in E_k$

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse ; justifier.

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbf{R},\ y \neq x :\ |x - y| < \varepsilon$
2. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbf{Q} :\ |x - y| < \varepsilon$
3. $\exists x \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbf{R},\ y \neq x :\ |x - y| < \varepsilon$
4. $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbf{R},\ y \neq x :\ |x - y| < \varepsilon$
5. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbf{R} :\ |x - y| < \varepsilon$
6. $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbf{R}, ,\ y \neq x :\ |x - y| < \varepsilon$
7. $\exists a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} :\ a^b \in \mathbf{Q}$.
8. $(\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbf{R} :\ |x - y| < \varepsilon) \Rightarrow \big(\exists a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} :\ a^b \in \mathbf{Q}\big)$
9. $\big(\exists a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} :\ a^b \in \mathbf{Q}\big) \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R} :\ |x - y| < \varepsilon)$
10. Si une fonction f admet une tangente horizontale en un certain $x_0 \in \mathbf{R}$ alors elle admet un extremum local en x_0.
11. Si une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ admet un extremum local en $x_0 \in \mathbf{R}$ alors elle admet une tangente horizontale en un certain x_0.
12. Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$ alors $f(x) = 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.
13. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$ alors $f(x) = 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 3

Reprendre la question de M. HENRY sur la preuve par récurrence du fait que tout lot de stylos ne contient que des stylos de même couleur.

Exercice 4

Montrer par récurrence les deux propriétés suivantes et indiquer quelle(s) différence(s) notable(s) on peut observer entre ces deux preuves.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$F_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$
3. Tout entier supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en un produit de de nombre premiers.

Exercice 5

Montrer que si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles et d_1 est contenue dans le plan P alors d_2 est parallèle à P.

1 Entraînement à l'écrit

Rédiger la solution Problème n^{o} 1 I, II et V de l'Épreuve 1 de 2022.