IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GCF
2017-2018, S3

# Correction du Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 1

**Exercice 1 :** On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I})\begin{cases} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 7x_2 \\ \text{sous} & x_1 \leq 18 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives $e_1, e_2, e_3$ et $e_4$, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S})\begin{cases} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 7x_2 \\ \text{sous} & x_1 + e_1 = 18 \\ & x_2 + e_2 = 10 \\ & x_1 + 3x_2 + e_3 = 36 \\ & x_1 + 2x_2 - e_4 = 8 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases}.$$

La quatrième contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de $e_4$ comme variable de base conduirait à une contradiction ($e_4$ serait négatif) et les variables $x_1$ et $x_2$ sont présentes dans les autres contraintes. On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.
Après l'introduction d'une variable artificielle $w_1$ et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A})\begin{cases} \text{minimiser} & w = w_1 \\ \text{sous} & x_1 + e_1 = 18 \\ & x_2 + e_2 = 10 \\ & x_1 + 3x_2 + e_3 = 36 \\ & x_1 + 2x_2 - e_4 + w_1 = 8 \\ & 2x_1 + 7x_2 - z = 0 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, w_1 \geq 0 \end{cases}.$$

2. **Phase I :** Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I par la méthode des tableaux avec pour variables de base initiales $e_1, e_2, e_3$ et $w_1$. Le premier tableau est le suivant :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $w_1$ | $-z$ | $-w$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| $e_3$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 |
| $w_1$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| $-z$ | 2 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $-w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

On exprime l'objectif artificiel $w$ en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de $w_1$ dans la ligne de $-w$ par l'opération $L_6 \leftarrow L_6 - L_4$. On obtient le tableau :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $w_1$ | $-z$ | $-w$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| $e_3$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 |
| $w_1$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| $-z$ | 2 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $-w$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -8 |

Nous traitons un problème de minimisation de $w$ et la ligne de $-w$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-w$ soit le "plus négatif" possible. Nous choisissons donc de faire entrer $x_2$ dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de $b$ sur les coefficients de la colonne de $x_2$ dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— $\infty$ pour $e_1$,

— 10 pour $e_2$,

— 12 pour $e_3$,

— 4 pour $w_1$.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire $w_1$. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par $x_1$ et $x_1$ et des 0 dans le reste de la colonne de $x_1$. On commence par réaliser l'opération $L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4$ :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $w_1$ | $-z$ | $-w$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| $e_3$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 4 |
| $-z$ | 2 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $-w$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -8 |

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4$, $L_5 \leftarrow L_5 - 7L_4$ et $L_6 \leftarrow L_6 + 2L_4$ , on obtient :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $w_1$ | $-z$ | $-w$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_2$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 6 |
| $e_3$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 24 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 4 |
| $-z$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | $-\frac{7}{2}$ | 1 | 0 | -28 |
| $-w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-w$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour $(\mathrm{P_S})$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 18 \\ 6 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de $z$.

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $-z$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_2$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| $e_3$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 24 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 4 |
| $-z$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | 1 | -28 |

Nous traitons un problème de maximisation de $z$ et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de $e_4$. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de $b$ sur les coefficients de la colonne de $e_4$ dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— $\infty$ pour $e_1$,
— 12 pour $e_2$,
— $\frac{48}{3}$ pour $e_3$,
— $-8$ pour $x_2$.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici $e_2$. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par $e_4$ et $e_4$ puis des 0 dans le reste de la colonne de $e_4$. On réalise l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2$ :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $-z$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_4$ | $-1$ | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $e_3$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 24 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 4 |
| $-z$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | 1 | -28 |

En effectuant les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_2$ et $L_5 \leftarrow L_5 - \frac{7}{2}L_2$, on obtient :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $-z$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| $e_4$ | $-1$ | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $e_3$ | 1 | 0 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| $-z$ | 2 | 0 | 0 | -7 | 0 | 0 | 1 | -70 |

Nous traitons un problème de maximisation de $z$ et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de $x_1$. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de $b$ sur les coefficients de la colonne de $x_1$ dans les lignes 1 à 4. On obtient :

— 18 pour $e_1$,
— $-12$ pour $e_2$,
— 6 pour $e_3$,
— $\infty$ pour $x_2$.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs ; ici $e_3$. Il y a déjà un 1 dans la case repérée par $x_1$ et $x_1$ et il ne reste qu'à mettre des 0 dans le reste de la colonne de $x_1$.

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3$, on obtient :

| v.b. \ v. | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $-z$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 1 | 3 | -1 | 0 | 0 | 12 |
| $e_4$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 18 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| $-z$ | 0 | 0 | 0 | -1 | -2 | 0 | 1 | -82 |

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = 82$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (6, 10)$.

**Exercice 2 :**

1. (a) **Définition des variables :** Pour $i = 1, 2$, on note $x_i$ le nombre de bijoux $C_i$ produits par le créateur en une semaine.

   (b) **Définition des contraintes :**

   i. Contrainte liée au nombre de supports de broches :
   $$x_1 \leq 18.$$

   ii. Contrainte liée au nombre de supports de paires de boutons de manchettes :
   $$x_2 \leq 10.$$

   iii. Contrainte liée à la quantité de verre pour les perles :
   $$x_1 + 2x_2 \leq 32.$$

   iv. Contrainte liée à la quantité verre rose à terminer :
   $$x_1 + 2x_2 \geq 8.$$

   v. Contrainte liée au temps de travail :
   $$x_1 + 3x_2 \leq 36.$$

   vi. Contraintes de "bon sens" :
   $$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$
   que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

(c) **Définition de l'objectif :** Le créateur souhaite maximiser sa marge hebdomadaire brute :

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

exprimée en euros.

(d) **Formulation du problème :**

$$(\mathrm{P_{II}})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 2x_1 + 7x_2 \\ \text{sous} & x_1 \leq 18 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. .$$

(e) On remarque que ce problème est très similaire au problème $(\mathrm{P_I})$ de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $x_1 + 2x_2 \leq 32$ présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$.

2. La contrainte présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$ n'est pas saturée et satisfaite par la solution optimale de $(\mathrm{P_I})$ : $(x_1^*, x_2^*) = (6, 10)$ $(6 + 2 \times 10 = 26 < 32)$. On en déduit qu'une solution optimale de $(\mathrm{P_{II}})$ est

$$z^* = 82$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (6, 10)$. Le créateur maximisera sa marge hebdomadaire brute en produisant 6 broches $P_1$ et 10 paires de boutons de manchettes $P_2$ dans la semaine. Sa marge hebdomadaire brute sera alors de 82€.