DUT GEA 1$^{\text{e}}$ année
Probabilités, S2

Correction du Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 1

40 minutes

Question de cours

Donner le nombre de p-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal n.

Il s'agit de n^p.

Exercice 1

Soient $A, B, C \subset E$. On sait que $\text{Card}(E) = 100$, $\text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = 30$, $A \cap C = \emptyset$, $\text{Card}(A \cup B) = 50$ et $\text{Card}(B \cup C) = 40$. Déterminer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ puis $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(A \setminus B)$ et $\text{Card}(C \setminus B)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = 100 - 30 = 70,\\
\text{Card}(B) &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(A \cup B \cup C) = 50 + 40 - 70 = 20,\\
\text{Card}(A \setminus B) &= \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(B) = 50 - 20 = 30,\\
\text{Card}(C \setminus B) &= \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(B) = 40 - 20 = 20.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot ELECTION.

Après avoir choisi les places des deux E, on complète le mot avec une permutation des 6 lettres restantes aux places encore disponibles. Il y a donc :

$$\binom{8}{2} 6! = \frac{8!}{2!6!} 6! = 20160$$

possibilités.

Exercice 3

Le Système d'immatriculation des véhicules (SIV) français est basé sur une séquence de deux lettres - trois chiffres - deux lettres. Les trois chiffres vont de 001 à 999. Les lettres I, O et U sont exclues et les associations de lettres SS et WW sont interdites à gauche et l'association SS est interdite à droite. Déterminer le nombre de plaques minéralogiques possibles.

Ne sont utilisées pour former le deux séquences de lettres que 23 lettres de l'alphabet. Ainsi, 23^2 mots de deux lettres peuvent être formés, mais à gauche deux d'entre eux sont proscrits et à droite 1 l'est. Il y a bien évidement $10^3 - 1 = 999$ nombres formés de 3 chiffres compris entre 001 et 999. On en déduit que le nombre de plaques minéralogiques possibles est :

$$(23^2 - 2) \times 999 \times (23^2 - 1) = 277977744.$$

Exercice 4

On considère un jeu de hasard consistant en le tirage simultané de 4 boules depuis une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 1 à 15.

1. Déterminer avec quelle probabilité les 4 boules tirées portent des numéros consécutifs.
2. Déterminer avec quelle probabilité les 4 boules tirées portent toutes un numéro pair.
3. Déterminer avec quelle probabilité les 4 boules tirées ne portent pas toutes des numéros de même parité.

Le nombre total de tirage de 4 boules parmi les 15 est :

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!11!} = 1365.$$

1. Les tirages donnant 4 boules avec des numéros consécutifs sont $\{1,2,3,4\}, \{2,3,4,5\}, \ldots, \{12,13,14,15\}$. Ils sont donc au nombre de 12. La probabilité pour que les 4 boules tirées portent des numéros consécutifs est donc :
$$\frac{12}{1365} = \frac{4}{455} \simeq 0,0088.$$
2. Les 4 boules tirées portent toutes un numéro pair si elle sont toute choisies parmi $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ et aucune n'est choisie parmi les 8 portant des numéros impairs. Il y a donc :
$$\binom{7}{4}\binom{8}{0} = \frac{7!}{4!3!}\frac{8!}{0!8!} = 35$$
tirages favorables. La probabilité pour que les 4 boules tirées portent toutes un numéro pair est donc :
$$\frac{35}{1365} = \frac{1}{39} \simeq 0,0256.$$
3. Version 1 : Notons C l'événement ≪ les 4 boules tirées n'ont pas toutes même parité ≫, P l'événement ≪ les 4 boules tirées portent des numéros pairs ≫et I l'événement ≪ les 4 boules tirées portent des numéros impairs ≫. On a vu dans la question précédente que $\mathbf{P}[P] = \frac{1}{39}$. On peut voir comme précédement que :
$$\mathbf{P}[I] = \frac{\binom{8}{4}}{1365}\binom{7}{0} = \frac{2}{39} \simeq 0,0513.$$
Il s'ensuit que :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}[C] &= \mathbf{P}\left[\overline{P \cup I}\right]\\ &= 1 - \mathbf{P}\left[P \cup I\right]\\ &= 1 - \left(\mathbf{P}\left[P\right] + \mathbf{P}\left[I\right]\right) \qquad \text{l'union étant disjointe}\\ &= 1 - \frac{3}{39} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13} \simeq 0,9231.\end{aligned}$$

Version 2 : Les boules ne portent pas toutes des numéros ayant même parité si une porte un numéro pair et trois un numéro impair ou deux portent un numéro pair et deux un numéro impair ou trois portent un numéro pair et une un numéro impair. Il y a donc :

$$\binom{7}{1}\binom{8}{3} + \binom{7}{2}\binom{8}{2} + \binom{7}{3}\binom{8}{1} = 1260$$

tirages possibles. Ceci arrive donc avec probabilité :

$$\frac{1260}{1365} = \frac{12}{13} \simeq 0,9231.$$