DUT GEA 1^{e} année
Probabilités, S2

Contrôle Continu n° 1

40 minutes

Question de cours

Donner le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

Il s'agit de $n!$.

Exercice 1

Soient $A, B, C \subset E$. On sait que $\text{Card}(E) = 200$, $A \subset C$, $\text{Card}(A \cap C) = 50$, $\text{Card}(C \setminus A) = 70$, $\text{Card}(B \cap C) = 40$ et $\text{Card}(A \cup B \cup C) = 140$. Déterminer $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(C \setminus B)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A) &= \text{Card}(A \cap C) = 50 \qquad (\text{car } A \subset C),\\
\text{Card}(C) &= \text{Card}(C \setminus A) + \text{Card}(A \cap C) = 70 + 50 = 120\\
\text{Card}(B) &= \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(C) + \text{Card}(B \cap C) \qquad (\text{par le principe d'inclusion exclusion}),\\
&= \text{Card}(A \cup B \cup C) - \text{Card}(C) + \text{Card}(B \cap C) = 140 - 120 + 40 = 60 \qquad (\text{car } A \subset C),\\
\text{Card}(C \setminus B) &= \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cap C) = 120 - 40.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot PRESIDENT.

Après avoir choisi les places des deux E, on complète le mot avec une permutation des 7 lettres restantes aux places encore disponibles. Il y a donc :

$$\binom{9}{2} 7! = \frac{9!}{2!7!} 7! = 181440$$

possibilités.

Exercice 3

Une messagerie électronique impose que les comptes des utilisateurs soient protégés par des mots de passe de 5 caractères composés de lettres majuscules de A à Z, de chiffres de 0 à 9 et d'exactement un caractère spécial parmi \$ & et -. Combien de mots de passe peut on former en respectant ces contraintes.

Après avoir choisi le caractère spécial et sa place dans le mot de passe, on complète le mot de passe par un mot composé de 4 caractères alphanumériques. Il y a donc :

$$\binom{3}{1}\binom{5}{1} 36^4 = 25194240$$

possibilités.

Exercice 4

On considère un jeu de hasard consistant en le tirage simultané de 5 boules depuis une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 1 à 16.

1. Déterminer avec quelle probabilité les 5 boules tirées portent des numéros consécutifs.
2. Déterminer avec quelle probabilité les 5 boules tirées portent toutes un numéro impair.
3. Déterminer avec quelle probabilité les 5 boules tirées ne portent pas toutes des numéros de même parité.

Le nombre total de tirage de 5 boules parmi les 16 est :

$$\binom{16}{5} = \frac{16!}{5!11!} = 4368.$$

1. Les tirages donnant 5 boules avec des numéros consécutifs sont $\{1,2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}, \dots, \{12,13,14,15,16\}$. Ils sont donc au nombre de 12. La probabilité pour que les 5 boules tirées portent des numéros consécutifs est donc :

$$\frac{12}{4368} = \frac{1}{364} \simeq 0,0027.$$

2. Les 5 boules tirées portent toutes un numéro impair si elle sont toute choisies parmi $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ et aucune n'est choisie parmi les 8 portant des numéros pairs. Il y a donc :

$$\binom{8}{5}\binom{8}{0} = \frac{8!}{5!3!}\frac{8!}{0!8!} = 56$$

tirages favorables. La probabilité pour que les 5 boules tirées portent toutes un numéro impair est donc :

$$\frac{56}{4368} = \frac{1}{78} \simeq 0,0128.$$

3. Version 1 : Notons C l'événement « les 5 boules tirées n'ont pas toutes même parité », P l'événement « les 5 boules tirées portent des numéros pairs »et I l'événement « les 5 boules tirées portent des numéros impairs ». On a vu dans la question précédente que $\mathbf{P}[I] = \frac{1}{78}$. On peut voir comme précédement que :

$$\mathbf{P}[P] = \frac{1}{78}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[C] &= \mathbf{P}\left[\overline{P \cup I}\right] \\
&= 1 - \mathbf{P}\left[P \cup I\right] \\
&= 1 - (\mathbf{P}\left[P\right] + \mathbf{P}\left[I\right]) \qquad \text{l'union étant disjointe} \\
&= 1 - \frac{2}{78} = \frac{76}{78} = \frac{38}{39} \simeq 0,9744.
\end{aligned}$$

Version 2 : Les boules ne portent pas toutes des numéros ayant même parité si une porte un numéro pair et quatre un numéro impair ou deux portent un numéro pair et trois un numéro impair ou trois portent un numéro pair et deux un numéro impair quatre portent un numéro pair et une un numéro impair. Il y a donc :

$$\binom{8}{1}\binom{8}{4} + \binom{8}{2}\binom{8}{3} + \binom{8}{3}\binom{8}{2} + \binom{8}{4}\binom{8}{1} = 4256$$

tirages possibles. Ceci arrive donc avec probabilité :

$$\frac{4256}{4368} = \frac{38}{39} \simeq 0,9744.$$