DUT GEA 1$^{\text{e}}$ année
Probabilités, S2

Contrôle Continu n° 1

40 minutes

Question de cours

Rappeler la formule donnant le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Il s'agit de :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercice 1

Soient $A, B, C \subset E$. On sait que $\text{Card}(E) = 300$, $\text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = 70$, $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, $\text{Card}(A \setminus C) = 70$, $\text{Card}(B \cap C) = 40$, $\text{Card}(B) = 60$ et $\text{Card}(C) = 140$. Déterminer $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B \cup C)$, $\text{Card}(C \setminus B)$ et $\text{Card}(\overline{B} \cap \overline{C})$.

On a :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A) &= \text{Card}(A \setminus C) = 70 \qquad (\text{car } A \cap (B \cup C) = \emptyset), \\
\text{Card}(B \cup C) &= \text{Card}(A \cup B \cup C) - \text{Card}(A) \qquad (\text{car } A \cap (B \cup C) = \emptyset) \\
&= \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) - \text{Card}(A) = 300 - 70 - 70 = 160, \\
\text{Card}(C \setminus B) &= \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cap C) = 140 - 40 = 100 \\
\text{Card}(\overline{B} \cap \overline{C}) &= \text{Card}(\overline{B \cup C}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(B \cup C) = 300 - 160 = 140.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot DEPUTE.

Après avoir choisi les places des deux E, on complète le mot avec une permutation des 4 lettres restantes aux places encore disponibles. Il y a donc :

$$\binom{6}{2} 4! = \frac{6!}{2!4!} 4! = 360$$

possibilités.

Exercice 3

Un petit avion comporte 6 places en classe affaire, 8 places en classe économique et trois place réservées à l'équipage. Toutes les places disponibles en classe affaire on été vendues et ainsi que la moitié des places de la classe économique. Deux membres de l'équipage sont présents sur le vol. Combien de façon y a t-il d'installer les personnes présentes avant le décollage ?

On choisit une liste ordonnée, sans répétition, de 6 sièges parmi 6 pour placer les passagers de classe affaire, une liste ordonnée, sans répétition, de 4 sièges parmi 8 pour placer les passagers de classe économique et une liste ordonnée, sans répétition, de 2 sièges parmi 3 pour placer les membres de l'équipage. Il y a donc :

$$\mathbf{A}_6^6 \mathbf{A}_8^4 \mathbf{A}_3^2 = \frac{6!}{0!} \frac{8!}{4!} \frac{3!}{1!} = 7257600$$

possibilités.

Exercice 4

On considère un jeu de hasard consistant en le tirage simultané de 4 boules depuis une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 11 à 29.

1. Déterminer avec quelle probabilité les 4 boules tirées portent des numéros consécutifs.
2. Déterminer avec quelle probabilité les 4 boules tirées portent toutes un numéro débutant par un 1.
3. Déterminer avec quelle probabilité les numéros des 4 boules tirées ne débutent pas tous par le même chiffre.

Le nombre total de tirage de 4 boules parmi les 19 est :

$$\binom{19}{4} = \frac{19!}{4!15!} = 3876.$$

1. Les tirages donnant 4 boules avec des numéros consécutifs sont $\{11, 12, 13, 14\}, \{12, 13, 14, 15\}, \ldots, \{26, 27, 28, 29\}$. Ils sont donc au nombre de 16. La probabilité pour que les 4 boules tirées portent des numéros consécutifs est donc :

$$\frac{16}{3876} = \frac{4}{969} \simeq 0,0041.$$

2. Les 4 boules tirées portent toutes un numéro débutant par un 1 si elle sont toute choisies parmi $11, 12, \ldots, 19$ et aucune n'est choisie parmi les 10 débutant par un 2. Il y a donc :

$$\binom{9}{4}\binom{10}{0} = \frac{9!}{4!5!}\frac{10!}{0!10!} = 126$$

tirages favorables. La probabilité pour que les 4 boules tirées portent toutes un numéro pair est donc :

$$\frac{126}{3876} = \frac{21}{646} \simeq 0,0325.$$

3. Version 1 : Notons C l'événement « les 4 boules tirées portent des numéros qui ne débutent pas tous par le même chiffre », U l'événement « les 4 boules tirées portent des numéros qui ne débutent par un 1 » et D l'événement « les 4 boules tirées portent des numéros qui ne débutent par un 2 ». On a vu dans la question précédente que $\mathbf{P}[U] = \frac{21}{646}$. On peut voir comme précédement que :

$$\mathbf{P}[D] = \frac{35}{646}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[C] &= \mathbf{P}\left[\overline{U \cup D}\right] \\ &= 1 - \mathbf{P}\left[D \cup D\right] \\ &= 1 - (\mathbf{P}\left[U\right] + \mathbf{P}\left[D\right]) \qquad \text{l'union étant disjointe} \\ &= 1 - \frac{21}{646} - \frac{35}{646} = \frac{295}{323} \simeq 0,9133.\end{aligned}$$

Version 2 : Les boules ne portent pas toutes des numéros débutant par le même chiffre si une porte un numéro débutant par 1 et trois un numéro débutant par un 2 ou si deux portent un numéro débutant par 1 et deux un numéro débutant par un 2 ou si trois portent un numéro débutant par 1 et une un numéro débutant par un 2 . Il y a donc :

$$\binom{9}{1}\binom{10}{3} + \binom{9}{2}\binom{10}{2} + \binom{9}{3}\binom{10}{1} = 3540$$

tirages possibles. Ceci arrive donc avec probabilité :

$$\frac{3540}{3876} = \frac{295}{323} \simeq 0,9133.$$