IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GMO, 2015-2016

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 : On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I})\begin{cases}\text{maximiser} & z = 6x_1 + 8x_2\\ \text{sous} & 4x_1 + 5x_2 \leq 5000\\ & 5x_1 + 8x_2 \leq 7300\\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 2700\\ & x_1, x_2 \geq 0\end{cases}.$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives e_1, e_2 et e_3, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S})\begin{cases}\text{maximiser} & z = 6x_1 + 8x_2\\ \text{sous} & 4x_1 + 5x_2 + e_1 = 5000\\ & 5x_1 + 8x_2 + e_2 = 7300\\ & 3x_1 + 2x_2 - e_3 = 2700\\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0\end{cases}.$$

La troisième contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de e_3 comme variable de base conduirait à une contradiction (e_3 serait négatif) et les variables x_1 et x_2 sont présentes dans les autres contraintes. On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.
Après l'introduction d'une variable artificielle w_1 et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A})\begin{cases}\text{minimiser} & w = w_1\\ \text{sous} & 4x_1 + 5x_2 + e_1 = 5000\\ & 5x_1 + 8x_2 + e_2 = 7300\\ & 3x_1 + 2x_2 - e_3 + w_1 = 2700\\ & 6x_1 + 8x_2 - z = 0\\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, w_1 \geq 0\end{cases}.$$

2. **Phase I :** Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I par la méthode des tableaux avec pour variables de base initiales e_1, e_2 et w_1. Le premier tableau est le suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-w$	b
e_1	4	5	1	0	0	0	0	0	5000
e_2	5	8	0	1	0	0	0	0	7300
w_1	3	2	0	0	-1	1	0	0	2700
$-z$	6	8	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

On exprime l'objectif artificiel w en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de w_1 dans la ligne de $-w$ par l'opération $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$. On obtient le tableau :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-w$	b
e_1	4	5	1	0	0	0	0	0	5000
e_2	5	8	0	1	0	0	0	0	7300
w_1	3	2	0	0	-1	1	0	0	2700
$-z$	6	8	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-3	-2	0	0	1	0	0	1	-2700

Nous traitons un problème de minimisation de w et la ligne de $-w$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-w$ soit le "plus négatif" possible. Nous choisissons donc de faire entrer x_1 dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_1 dans les lignes 1 à 3. On obtient :

— 1250 pour e_1,

— 1460 pour e_2,

— 900 pour w_1.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire w_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_1 et x_1 et des 0 dans le reste de la colonne de x_1. On commence par réaliser l'opération $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$:

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-w$	b
e_1	4	5	1	0	0	0	0	0	5000
e_2	5	8	0	1	0	0	0	0	7300
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	900
$-z$	6	8	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-3	-2	0	0	1	0	0	1	-2700

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$, $L_4 \leftarrow L_4 - 6L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 + 3L_3$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-w$	b
e_1	0	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	1400
e_2	0	$\frac{14}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	2800
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	900
$-z$	0	4	0	0	2	-2	1	0	-5400
$-w$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-w$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour ($\mathrm{P_S}$) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 0 \\ 1400 \\ 2800 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de z.

Phase II La phase II débute avec le tableau suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
e_1	0	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	0	1400
e_2	0	$\frac{14}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	0	2800
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	900
$-z$	0	4	0	0	2	1	-5400

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de x_2. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_2 dans les lignes 1 à 3. On obtient :
— 600 pour e_1,
— 600 pour e_2,
— 1350 pour x_1.
On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs. Les variables e_1 et e_2 sont ex-æquo. On choisit (arbitrairement) de faire sortir e_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_2 et x_2 puis des 0 dans le reste de la colonne de x_2. On réalise l'opération $L_1 \leftarrow \frac{3}{7}L_1$:

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
x_2	0	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	0	600
e_2	0	$\frac{14}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	0	2800
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	900
$-z$	0	4	0	0	2	1	-5400

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{14}{3}L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
x_2	0	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	0	600
e_2	0	0	-2	1	-1	0	0
x_1	1	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	0	500
$-z$	0	0	$-\frac{12}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	1	-7800

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = 7800$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (500, 600)$.

Exercice 2 :

1. (a) **Définition des variables :** Pour $i = 1, 2$, on note x_i le nombre de paquets de chocolats C_i produits par le confiseur en un mois.

   (b) **Définition des contraintes :**

i. Contrainte liée à la quantité de sucre disponible durant la semaine :

$$80x_1 + 100x_2 \leq 100000$$

soit

$$4x_1 + 5x_2 \leq 5000.$$

ii. Contrainte liée à la quantité de cacao disponible durant la semaine :

$$100x_1 + 160x_2 \leq 146000$$

soit

$$5x_1 + 8x_2 \leq 7300.$$

iii. Contrainte liée à la quantité de crème disponible durant la semaine :

$$30x_1 + 20x_2 \leq 40000$$

soit

$$3x_1 + 2x_2 \leq 4000$$

iv. Contrainte liée à la quantité de crème à utiliser avant la fin de la semaine :

$$30x_1 + 20x_2 \geq 27000$$

soit

$$3x_1 + 2x_2 \geq 2700.$$

v. Contraintes de "bon sens" :

$$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$

que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

(c) **Définition de l'objectif :** Le confiseur souhaite maximiser sa marge hebdomadaire brute :

$$z = 6x_1 + 8x_2$$

exprimée en dixièmes d'euros.

(d) **Formulation du problème :**

$$(\mathrm{P_{II}}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 6x_1 + 8x_2 \\ \text{sous} & 4x_1 + 5x_2 \leq 5000 \\ & 5x_1 + 8x_2 \leq 7300 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4000 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 2700 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

(e) On remarque que ce problème est très similaire au problème $(\mathrm{P_I})$ de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $3x_1 + 2x_2 \leq 4000$ présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$.

2. La contrainte présente dans $(\mathrm{P_{II}})$ mais pas dans $(\mathrm{P_I})$ n'est pas saturée et satisfaite par la solution optimale de $(\mathrm{P_I})$: $(x_1^*, x_2^*) = (500, 600)$ $(3 \times 500 + 2 \times 600 = 2700 < 4000)$. On en déduit qu'une solution optimale de $(\mathrm{P_{II}})$ est

$$z^* = 7800$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (500, 600)$. Le confiseur maximisera sa marge hebdomadaire brute en produisant 500 paquets de chocolats C_1 et 600 paquets de chocolats C_2 dans la semaine. Sa marge hebdomadaire brute sera alors de 780€ (attention aux unités !).