DUT GEA 2e année
Mathématiques approfondies, S4
TD GMO 23

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1

Lors d'une campagne de vaccination proposée à 50000 personnes, on interroge au hasard 100 personnes. Dans cet échantillon, la proportion de personnes interrogées déclarant avoir été vaccinées est de 72%. On sait que la campagne sera efficace si au moins 70% de la population est effectivement vaccinée.

1. Construire un intervalle centré contenant la proportion de personnes vaccinée dans la population avec probabilité 0,95.
2. En supposant que la proportion de personnes vaccinées dans l'échantillon n'évolue pas, déterminer la taille minimale de l'échantillon pour affirmer au risque de 5% que la campagne sera efficace.

1. Notons p la « vraie » proportion de personnes vaccinées dans la population et $f^{(n)}$ la proportion observée dans l'échantillon de 100 individus (vue comme une variable aléatoire). Puisque l'échantillon est de taille suffisante (ici $n = 100 \geq 30$), on sait que la loi de la v.a. :

$$Z := \frac{f^{(n)} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$

On notera $\overline{f}$ la valeur prise par cette v.a. ; on a ici $\overline{f} = 0,72$.
On doit déterminer un intervalle de la forme $I_{0{,}05} = [\overline{f} - l_{0{,}05}; \overline{f} + l_{0{,}05}]$ contenant p avec probabilité $0,95$. Pour cela, on écrit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[p \in I_{0{,}05}\right] = 0,95 \iff \mathbf{P}\left[p \notin I_{0{,}05}\right] = 0,05 \\
\iff& \mathbf{P}\left[f^{(n)} - l_{0{,}05} \geq p \text{ ou } f^{(n)} + l_{0{,}05} \leq p\right] = 0,05 \\
\iff& \mathbf{P}\left[\frac{f^{(n)} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \geq \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,l_{0{,}05} \text{ ou } \frac{f^{(n)} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq -\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,l_{0{,}05}\right] = 0,05 \\
\iff& \mathbf{P}\left[Z \geq \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,l_{0{,}05} \text{ ou } Z \leq -\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,l_{0{,}05}\right] = 0,05.
\end{aligned}$$

Puisque Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, par lecture dans la table de la loi normale centrée réduite, dite « de l'écart-réduit », on obtient que $\mathbf{P}\left[Z \geq 1,960 \text{ ou } Z \leq -1,960\right] = 0,05$. Par identification et en estimant p par la proportion empirique $\overline{f}$, il s'ensuit que $\sqrt{\frac{n}{\overline{f}(1-\overline{f})}}\,l_{0{,}05} = 1,960$, soit encore

$$l_{0{,}05} = 1,960\sqrt{\frac{\overline{f}(1-\overline{f})}{n}}.$$

Ainsi,

$$I_{0{,}05} = \left[\overline{f} - 1,960\sqrt{\frac{\overline{f}(1-\overline{f})}{n}}; \overline{f} + 1,960\sqrt{\frac{\overline{f}(1-\overline{f})}{n}}\right] \simeq [0,63; 0,81].$$

2. Si la proportion de personnes vaccinées dans l'échantillon n'évolue pas, pour affirmer au risque de 5% que la campagne sera efficace, il faut que $\overline{f} - l_{0{,}05} \geq 0,7$. On obtient que :

$$\begin{aligned}
\overline{f} - l_{0{,}05} \geq 0,7 \iff \sqrt{\frac{\overline{f}(1-\overline{f})}{n}} \leq \frac{0,02}{1,960} \iff \frac{\overline{f}(1-\overline{f})}{n} \leq \left(\frac{0,02}{1,960}\right)^2 \\
\iff n \geq \left(\frac{1,960}{0,02}\right)^2 \times \overline{f}(1-\overline{f}) \simeq 1936,2.
\end{aligned}$$

L'échantillon devra contenir au moins 1937 individus.

Exercice 2

On admet que, dans un élevage de poulets fermiers âgés de 3 mois, le poids d'un poulet est une variable aléatoire normale de moyenne 1325 g et d'écart-type 175 g. On prélève au hasard 16 poulets de cet élevage et on suppose que leurs poids sont 2 à 2 indépendants.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\overline{X}$: "poids moyen d'un poulet d'un échantillon de 16 poulets".
2. Calculer la probabilité pour que le poids total T d'un échantillon de 16 poulets dépasse 22 Kg.

1. Notons $X_1, \ldots, X_{16}$ les v.a. représentant les poids respectifs des 16 poulets de l'échantillon. Le poids moyen d'un poulet dans l'échantillon est :

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{16}}{16} = \frac{1}{16}X_1 + \cdots + \frac{1}{16}X_{16}$$

et suit une loi normale comme combinaison linéaire de lois normales indépendantes. Son espérance est :

$$\mathbf{E}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{16}\mathbf{E}\left[X_1\right] + \cdots + \frac{1}{16}\mathbf{E}\left[X_{16}\right] = \mathbf{E}\left[X_1\right] = 1325$$

et les X_i étant independantes sa variance :

$$\mathbf{V}\left[\overline{X}\right] = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \mathbf{V}\left[X_1\right] + \cdots + \left(\frac{1}{16}\right)^2 \mathbf{V}\left[X_{16}\right] = \frac{1}{16}\mathbf{V}\left[X_1\right] = \frac{175^2}{16}.$$

Ainsi,

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(1325; \frac{175}{4}\right).$$

2. On déduit de la question précédente que :

$$Z := \frac{\overline{X} - 1325}{175/4} \sim \mathcal{N}\left(0; 1\right).$$

Le poids total des poulets dans l'échantillon n'est autre que $T = 16\overline{X}$ (en g). On obtient donc que la probabilité pour que celui-ci dépasse 22Kg est :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[T \geq 22000\right] &= \mathbf{P}\left[16\overline{X} \geq 22000\right] = \mathbf{P}\left[\overline{X} \geq 1375\right] \\ &= \mathbf{P}\left[\frac{\overline{X} - 1325}{175/4} \geq \frac{50}{175/4}\right] = \mathbf{P}\left[Z \geq \frac{8}{7}\right] = 1 - \mathbf{P}\left[Z \leq 8/7\right].\end{aligned}$$

On détermine $\mathbf{P}\left[Z \leq 8/7\right]$ par interpolation linéaire en écrivant que :

$$1,14 < \frac{8}{7} < 1,15$$

et donc

$$\frac{\mathbf{P}\left[Z \leq \frac{8}{7}\right] - \mathbf{P}\left[Z \leq 1,14\right]}{\mathbf{P}\left[Z \leq 1,15\right] - \mathbf{P}\left[Z \leq 1,14\right]} \simeq \frac{\frac{8}{7} - 1,14}{1,15 - 1,14}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[Z \leq \frac{8}{7}\right] &\simeq \frac{\frac{8}{7} - 1,14}{1,15 - 1,14}\left(\mathbf{P}\left[Z \leq 1,15\right] - \mathbf{P}\left[Z \leq 1,14\right]\right) + \mathbf{P}\left[Z \leq 1,14\right] \\ &\simeq \frac{\frac{8}{7} - 1,14}{0,01}\left(0,8749 - 0,8729\right) + 0,8729 \simeq 0,8735.\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc $\mathbf{P}\left[T \geq 22000\right] \simeq 1 - 0,8735 = 0,1265$.