

Contrôle Continu n° 2

Durée : 1h30

L'usage de tout document ou dispositif électronique est interdit à l'exception de celui de la calculatrice **non** programmable.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Le barème mentionné est indicatif et susceptible d'être modifié.

Question de cours : (2 points)

Donner la définition de l'élasticité instantanée d'une fonction f .

Exercice 1 : (4 points)

Une entreprise fabrique un article habituellement vendu 1270€ l'unité. La fabrication d'un article nécessite l'achat de matériaux et des heures de main d'œuvre pour un montant total de 78€. Les coûts fixes de production sont de 50000€ par mois. Une étude à montré que si le prix de vente est de x €, la demande est de $600000 - 300x$.

1. Exprimer le bénéfice mensuel de l'entreprise en fonction du prix de vente x du produit.
2. Déterminer le prix de vente permettant de maximiser le bénéfice mensuel de l'entreprise, ainsi que le montant de ce bénéfice. Commenter.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 \exp(-2x)$.

1. Calculer la dérivée de f .
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. La fonction f admet-elle un maximum global sur \mathbf{R}_+ ? Si oui, en quel point est-il atteint ?
4. La fonction f admet-elle un minimum global sur \mathbf{R}_+ ? Si oui, en quel point est-il atteint ?

Exercice 3 : (5 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
2. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 4 : (5 points)

Une firme fabrique trois produits P_1 , P_2 et P_3 à partir de trois matières premières M_1 , M_2 et M_3 . La production d'une unité de P_1 nécessite une unité de M_1 , une unité de M_2 et 0,5 unité de M_3 . La production d'une unité de P_2 nécessite cinq unités de M_1 , quatre unités de M_2 et une unité de M_3 . La production d'une unité de P_3 nécessite deux unités de M_1 , trois unités de M_2 et une unité de M_3 .

On note x_1 , x_2 et x_3 les quantités respectives des produits P_1 , P_2 et P_3 que la firme fabrique chaque semaine et y_1 , y_2 et y_3 les quantités de M_1 , M_2 et M_3 dont dispose la firme durant la semaine.

1. Sachant que la firme épuise son stock hebdomadaire de ressources, exprimer matriciellement la relation entre $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ et $Y = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$.
2. Soit A la matrice mise en évidence dans 1.. Justifier que l'inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Une semaine donnée, la firme dispose de 110 unités de M_1 , 100 unités de M_2 et 25 unités de M_3 . Déterminer, s'il existe, un programme de production épuisant le stock.