IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2016-2017, S1

Correction du Contrôle Continu n° 2

Question de cours :

Soit f une fonction dérivable en x et telle que $f(x) \neq 0$.
L'élasticité (instantanée) de f en x est le nombre :

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}.$$

Exercice 1 :

1. On sait que si le prix de vente de l'article est fixé à x€ l'entreprise écoulera $n(x) = 600000 - 300x$ unités dans le mois. Le bénéfice mensuel de l'entreprise est le produit de ses ventes auquel on retranche les coûts de production, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f(x) &= xn(x) - 78n(x) - 50000 \\ &= x(600000 - 300x) - 78(600000 - 300x) - 50000 \\ &= -300x^2 + 623400x - 46850000. \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = -600x + 623400.$$

Celle-ci s'annule en 1039, est strictement positive pour $x \leq 1039$ et négative pour $x \geq 1039$. On dresse ensuite le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1039		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	277006300	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, f admet un maximum global en 1039. L'entreprise maximisera son bénéfice mensuel en réduisant le prix de vente unitaire de son produit de 1270€ à 1039€. Celui-ci sera alors de $f(1039) = 277006300$€.
Remarque : De fa c con alternative, on peut dire que f est un polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ et admet donc un maximum global en $\frac{-b}{2a} = \frac{-623400}{2\times(-300)} = 1039$.

Exercice 2 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et peut s'écrire sous la forme $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \frac{1}{3}x^2$ et $v(x) = \exp(-2x)$ (donc $u'(x) = \frac{2}{3}x$ et $v'(x) = -2\exp(-2x)$). En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient que pour tout $\mathbf{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{2}{3}x\exp(-2x) - \frac{2}{3}x^2\exp(-2x) \\ &= \frac{2}{3}x(1-x)\exp(-2x). \end{aligned}$$

2. Puisque $\exp(-2x) > 0$ pour tout x, f' est du signe de $x(1-x)$. Le tableau de variations de f prend la forme suivante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-2}}{3}$	$\searrow$	0

3. La fonction f admet $\frac{e^{-2}}{3}$ pour maximum global sur $\mathbf{R}_+$; celui-ci est atteint en 1.
4. La fonction f admet 0 pour minimum global sur $\mathbf{R}_+$; celui-ci est atteint en 0.

Exercice 3 :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1) \\
&= 1 \times \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} && \text{(en développant le long de la première colonne)} \\
&= \frac{3}{2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A est inversible. Déterminons son inverse par la méthode de Gauss-Jordan, en adoptant une présentation par tableaux.

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Le premier pivot (rouge) étant déjà à 1, on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$ pour mettre à zéro les coefficients hors diagonale de la première colonne. On obtient :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Le deuxième pivot est -1 ; on effectue donc l'opération $L_2 \leftarrow L_2/(-1)$ pour mettre à 1 le deuxième coefficient diagonal

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right.$$

puis les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2$ pour mettre à zéro les coefficients hors diagonale de la deuxième colonne.

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right.$$

Le troisième pivot est $-\frac{3}{2}$; on effectue donc l'opération $L_3 \leftarrow L_3/(-\frac{3}{2})$ pour mettre à 1 le troisième coefficient diagonal

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}$$

puis les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_2$ pour mettre à zéro les coefficients hors diagonale de la troisième colonne.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}$$

Ainsi, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2) \\ &= 0 && \text{(la dernière colonne ne contenant que des 0).} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice B n'est pas inversible.

Exercice 4 : (6 points)

Une firme fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 à partir de trois matières premières M_1, M_2 et M_3. La production d'une unité de P_1 nécessite une unité de M_1, une unité de M_2 et 0,5 unité de M_3. La production d'une unité de P_2 nécessite cinq unités de M_1, quatre unités de M_2 et une unité de M_3. La production d'une unité de P_3 nécessite deux unités de M_1, trois unités de M_2 et une unité de M_3.

On note x_1, x_2 et x_3 les quantités respectives des produits P_1, P_2 et P_3 que la firme fabrique chaque semaine et y_1, y_2 et y_3 les quantités de M_1, M_2 et M_3 dont dispose la firme durant la semaine.

1. Si, lors d'une semaine, la firme produit x_i unités de P_i, $i = 1, 2, 3$, elle utilisera :
   — $x_1 + 5x_2 + 2x_3$ unités de M_1,
   — $x_1 + 4x_2 + 3x_3$ unités de M_2,
   — $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3$ unités de M_3.
   Puisque la firme épuise sont stock hebdomadaire de ressources, ces quantités sont respectivement égales à y_1, y_2 et y_3. On obtient donc que les variables x_1, x_2, x_3 ,y_1, y_2 et y_3 satisfont le système :

$$\text{(S)} \begin{cases} x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = y_1 \\ x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = y_2 \\ \frac{1}{2}x_1 & +x_2 & +x_3 & = y_3 \end{cases}.$$

   Ce système s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons déjà calculer l'inverse de la matrice A dans l'Exercice 3, il n'y a rien à faire !
   Remarque : De manière alternative, on peut vérifier que

$$A \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le vecteur de ressource est donné par
$$Y = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 25 \end{pmatrix}.$$
S'il existe un programme de production X épuisant le stock, celui-ci vérifie nécessairement $AX = Y$, soit encore
$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$
Les quantités produites par la firme ne peuvent être négative et un tel programme de production n'existe pas (on aurait $x_1 = -10 < 0$).