IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2016-2017, S2

Contrôle Continu n^{o} 2

Durée : 1h20

L'usage de tout document ou dispositif électronique est interdit à l'exception de celui de la calculatrice **non** *programmable. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Questions de cours : *(3 points)*

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$. Donner $\mathbf{P}[X = k]$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}[X]$.

Exercice 1 : *(4 points)*

Un test de dépistage de maladie est positif chez 99% des malades mais également chez 1% des bien-portants. On pratique le test chez une population nombreuse pour laquelle on sait qu'en moyenne 1 personne sur 200 est atteinte de la maladie.

On choisit au hasard une personne dans la population et on définit les événements :
A : « la personne choisie est atteinte par la maladie »,
P : « le test est positif pour la personne choisie ».

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif chez une personne prise au hasard dans cette population ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit effectivement malade ? Commenter.

Exercice 2 : *(7 points)*

Dans un casino, une partie d'un jeu de hasard coûte 2 euros. Si la partie est gagnée, le joueur remporte 5 euros et rien sinon. La probabilité de gagner une partie est de $\frac{1}{3}$.

1. Un joueur arrive dans le casino avec 16 euros. Quelle est la probabilité pour qu'il soit ruiné avant de jouer la dixième partie ?
2. Un joueur arrive dans le casino avec 20 euros et joue exactement 10 parties. On note X le nombre de parties gagnées.
   (a) Qu'elle est la loi de X ? (justifier)
   (b) En moyenne, combien de parties le joueur peut-il espérer gagner ? En déduire avec qu'elle somme il peut espérer repartir ?
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'il reparte du casino avec au moins autant d'argent qu'à son arrivée ?

Exercice 3 : *(6 points)*

Dans un échantillon de matière radioactive, on sait que le nombre N de désintégrations entre les instants 0 et t (exprimé en années) est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de moyenne :

$$\mathbf{E}[N] = \lambda \times n \times t,$$

où n est le nombre d'atomes dans l'échantillon et λ est le taux de désintégration de l'élément radioactif (exprimé en désintégrations par an). On admet que le taux de désintégration du Krypton 85 est $\lambda_{^{85}\mathrm{Kr}} = 0,064$ et que celui du Césium 137 est $\lambda_{^{137}\mathrm{Cs}} \simeq 0,023$.

1. On considère un échantillon de 10^9 atomes de Krypton 85.
   (a) Déterminer la probabilité pour qu'il ne se produise aucune désintégration en une seconde.
   (b) Déterminer la probabilité pour qu'il se produise au moins 5 désintégrations en une seconde.
2. On considère un échantillon de 10^9 atomes de Krypton 85 et 2×10^9 atomes de Césium 137. On suppose que les deux éléments n'ont aucune interaction entre eux.
   (a) Quelle est la loi du nombre total de désintégrations N_{tot} dans cet échantillon pendant une période d'une seconde ? (justifier)
   (b) Déterminer la probabilité pour qu'il se produise au plus 5 désintégrations en une seconde.
   (c) Déterminer la probabilité pour qu'il se produise au moins 6 désintégrations en une seconde.

Rappel : *Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :*

$$\mathbf{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

En négligeant les années bissextiles, on considère qu'il y a $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\ 536\ 000$ *secondes par an.*