IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année, 2016-2017, S2

Correction du Contrôle Continu n° 2

Questions de cours :

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. La loi de $X_1 + X_2$ est $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$. On a, pour $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\mathbf{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$\mathbf{E}[X] = np$ et $\mathbf{V}[X] = np(1-p)$.

Exercice 1 :

Un test de dépistage de maladie est positif chez 99% des malades mais également chez 1% des bien-portants. On pratique le test chez une population nombreuse pour laquelle on sait qu'en moyenne 1 personne sur 200 est atteinte de la maladie.

1. Déterminons la probabilité pour que le test soit positif chez une personne prise au hasard dans cette population. En notant A l'événement ≪ la personne testée est atteinte par la maladie ≫ et P l'événement ≪ le test est positif pour cette personne ≫, l'énoncé donne :

$$\mathbf{P}[P|A] = 0,99, \quad \mathbf{P}[P|A^c] = 0,01 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}[A] = \frac{1}{200} = 0,005.$$

Par la formule des probabilités totales (version conditionnelle), on a :

$$\mathbf{P}[P] = \mathbf{P}[P|A]\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[P|A^c]\mathbf{P}[A^c] = 0,99 \times 0,005 + 0,01 \times (1 - 0,005) = 0,0149.$$

2. La probabilité pour qu'une personne ayant un test positif soit effectivement malade est :

$$\mathbf{P}[A|P] = \frac{\mathbf{P}[P \cap A]}{\mathbf{P}[P]} = \frac{\mathbf{P}[P|A]\mathbf{P}[A]}{\mathbf{P}[P]} = \frac{0,99 \times 0,005}{0,0149} \simeq 0,33.$$

Le test est de faible qualité et produit dans plus de 2 cas sur 3 un faux positif.

Exercice 2 :

Dans un casino, une partie d'un jeu de hasard coûte 2 euros. Si la partie est gagnée, le joueur remporte 5 euros et rien sinon. La probabilité de gagner une partie est de $\frac{1}{3}$.

1. Avec ses 16 euros, le joueur peut faire 8 parties sans être ruiné. S'il gagne au moins une des 8 premières parties, il aura au moins 5 euros restants à la fin des 8 premières parties et il ne sera pas ruiné avant de jouer la dixième. S'il ne gagne aucune de ces 8 parties, il sera ruiné à l'issue de la huitième partie. En notant A l'événement ≪ aucune des 8 premières parties n'est gagnée par le joueur ≫ et en utilisant que les parties sont mutuellement indépendantes, on obtient que la probabilité pour que le joueur soit ruiné avant de jouer la dixième partie est :

$$\mathbf{P}[A] = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561} \simeq 0,04.$$

2. Un joueur arrive dans le casino avec 20 euros et joue exactement 10 parties. On note X le nombre de parties gagnées.
   (a) Les variables aléatoires :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{e}} \text{ partie est gagnée par le joueur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 10,$$

sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}er\left(\frac{1}{3}\right)$. Le nombre de parties gagnées par le joueur est $X = X_1 + \cdots + X_{10}$ et est donc distribué selon la loi $\mathcal{B}in(10, \frac{1}{3})$.

(b) En moyenne, le joueur peut espérer gagner $\mathbf{E}[X] = 10 \times \frac{1}{3} \simeq 3,33$ parties et repartir avec $\frac{50}{3} \simeq 16,67$ euros (correspondants aux gains, les 20 euros avec lesquels il est arrivé ayant payé les mises).

(c) Le joueur ayant payé les mises grâce aux 20 euros avec lesquels il est arrivé, il repartira avec au moins autant d'argent que quand il est arrivé s'il gagne au moins $\frac{20}{5} = 4$ parties. Ceci arrive avec probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \geq 4] &= 1 - \mathbf{P}[X \leq 3] = 1 - \mathbf{P}[X = 0] - \mathbf{P}[X = 1] - \mathbf{P}[X = 2] - \mathbf{P}[X = 3] \\
&= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 - \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 \\
&= \frac{8675}{19683} \simeq 0,44.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Dans un échantillon de matière radioactive, on sait que le nombre N de désintégrations entre les instants 0 et t (exprimé en années) est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de moyenne :

$$\mathbf{E}[N] = \lambda \times n \times t,$$

où n est le nombre d'atomes dans l'échantillon et λ est le taux de désintégration de l'élément radioactif (exprimé en désintégrations par an). On admet que le taux de désintégration du Krypton 85 est $\lambda_{^{85}\mathrm{Kr}} = 0,064$ et que celui du Césium 137 est $\lambda_{^{137}\mathrm{Cs}} \simeq 0,023$.

1. Notons N_1 le nombre de désintégrations en une seconde dans un échantillon de 10^9 atomes de Krypton 85. D'après l'énoncé, ce nombre suit une loi de Poisson de moyenne :

$$\mathbf{E}[N_1] = \lambda_{^{85}\mathrm{Kr}} \times 10^9 \times \frac{1}{31536000} = \frac{0,064 \times 10^9}{31536000} = \frac{4000}{1971} \simeq 2,03.$$

(a) La probabilité pour qu'il ne se produise aucune désintégration en une seconde dans cet échantillon est :

$$\mathbf{P}[N_1 = 0] = e^{-\frac{4000}{1971}} \simeq 0,13$$

(b) La probabilité pour qu'il se produise au moins 5 désintégrations en une seconde dans cet échantillon est :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[N_1 \geq 5] &= 1 - \mathbf{P}[N_1 \leq 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}[N_1 = k] \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-\frac{4000}{1971}} \frac{\left(\frac{4000}{1971}\right)^k}{k!} \simeq 0,055.
\end{aligned}$$

2. Notons N_2 le nombre de désintégrations en une seconde dans un échantillon de 2×10^9 atomes de Césium 137. D'après l'énoncé, ce nombre suit une loi de Poisson de moyenne :

$$\mathbf{E}[N_2] = \lambda_{^{137}\mathrm{Cs}} \times 2 \times 10^9 \times \frac{1}{31536000} = \frac{0,023 \times 2 \times 10^9}{31536000} = \frac{2875}{1971} \simeq 1,46.$$

Notons N_{tot} le nombre de désintégrations en une seconde dans un échantillon de 10^9 atomes de Krypton 85 et 2×10^9 atomes de Césium 137.

(a) Puisque l'on suppose que les deux éléments n'ont aucune interaction entre eux, les variables aléatoires N_1 et N_2 sont indépendantes. Elles sont de plus distibuées selon les lois de Poisson de paramètres respectifs $\frac{4000}{1971}$ et $\frac{2875}{1971}$. Ainsi, leur somme N_{tot} suit la loi de Poisson de moyenne :

$$\frac{4000}{1971} + \frac{2875}{1971} = \frac{6875}{1971} \simeq 3,49.$$

(b) La probabilité pour qu'il se produise au plus 5 désintégrations en une seconde dans cet échantillon est :

$$\mathbf{P}[N_{\text{tot}} \leq 5] = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{P}[N_{\text{tot}} = k] = \sum_{k=0}^{5} e^{-\frac{6875}{1971}} \frac{\left(\frac{6875}{1971}\right)^k}{k!} \simeq 0,859.$$

(c) La probabilité pour qu'il se produise au moins 6 désintégrations en une seconde dans cet échantillon est :

$$\mathbf{P}[N_{\text{tot}} \geq 6] = 1 - \mathbf{P}[N_{\text{tot}} \leq 5] \simeq 0,141.$$