IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année TD3, 2016-2017, S2
Mathématiques financières

Correction du Contrôle Continu

Question de cours :

On appelle *valeur actuelle nette (VAN)* d'un investissement la valeur actuelle des flux de trésorerie provoqués par cet investissement. Si le taux d'actualisation annuel est τ, le montant de l'investissement I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie r_k en fin de k^{e} année, la valeur actuelle nette de l'investissement est donnée par :

$$\text{VAN} = -I + \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{(1+\tau)^k}.$$

Exercice 1 :

1. Les intérêts étant capitalisés 24 fois par an, le taux périodique du livret est donné par :

$$\tau_{\text{pér}} = \frac{\tau_{\text{nom}}}{24} = \frac{0,01}{24} \simeq 0,04\%$$

et son taux annuel effectif par :

$$\tau_{\text{eff}} = (1+\tau_{\text{pér}})^{24} - 1 = \left(1 + \frac{0,01}{24}\right)^{24} - 1 \simeq 1\%.$$

2. La valeur acquise C_5 au terme de 5 ans pour un placement de $C_0 = 1000$€ sur ce livret est :

$$C_5 = C_0\,(1+\tau_{\text{eff}})^5 = 1000\left(\left(1+\frac{0,01}{24}\right)^{24}\right)^5 = 1000\left(1+\frac{0,01}{24}\right)^{120} \simeq 1051,26.$$

Exercice 2 :

1. En utilisant que le taux annuel est de 8%, la situation peut être synthétisée dans un tableau prenant la forme suivante.

Année	2006	...	2011	2012	...	2017
Annuité a_k	5000	...	5000	-5000	...	-5000
Valeur de a_k au 01/01/17	$5000 \times 1,08^{11}$	...	$5000 \times 1,08^{6}$	$-5000 \times 1,08^{5}$	...	-5000

Le montant disponible sur le livret après le dernier retrait est donc :

$$\begin{aligned}
V &= 5000 \times 1,08^{11} + \cdots + 5000 \times 1,08^{6} - 5000 \times 1,08^{5} - \cdots - 5000 \times 1,08 - 5000 \\
&= 5000(1,08^6 + \cdots + 1,08^{11}) - 5000(1 + 1,08 + \cdots + 1,08^5) \\
&= 5000 \times 1,08^6 \frac{1,08^6 - 1}{0,08} - 5000 \frac{1,08^6 - 1}{0,08} = 0 \\
&= \left(5000 \times 1,08^6 - 5000\right) \frac{1,08^6 - 1}{0,08} \\
&\simeq 21526,34€,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les formules de calculs de sommes partielles de suites géométriques.

2. Pour que les retraits constants égaux à R, effectués du 01/01/2012 au 01/01/2017, permettent d'obtenir un solde nul après le dernier retrait, le même raisonnement que ci-dessus montre que le montant des retraits R doit vérifier :

$$5000(1,08^6 + \cdots + 1,08^{11}) - R(1 + 1,08 + \cdots + 1,08^5) = 0$$

soit

$$5000 \times 1,08^6 \frac{1,08^6 - 1}{0,08} - R\frac{1,08^6 - 1}{0,08} = 0$$

ou encore

$$\left(5000 \times 1,08^6 - R\right) \frac{1,08^6 - 1}{0,08} = 0$$

Puisque $\frac{1,08^6-1}{0,08} \neq 0$, on obtient que $5000 \times 1,08^6 - R = 0$ et donc :

$$R = 5000 \times 1,08^6 \simeq 7934,37€.$$

Exercice 3 :

1. Puisqu'il s'agit d'un emprunt à annuités constantes, les amortissements m_k sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $1 + \tau$, où τ est le taux d'intérêt. Ici, on sait que $m_1 = 2800€$ et $m_5 = 3151,424668€$. On et déduit que :

$$(1+\tau)^4 = \frac{m_1\,(1+\tau)^4}{m_1} = \frac{m_5}{m_1} = \frac{3151,424668}{2800}$$

puis que

$$\tau = \left(\frac{3151,424668}{2800}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 3\%.$$

2. On sait que, dans le cadre d'un emprunt à annuités constantes, le montant du premier amortissement m_1 vérifie :

$$m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}.$$

avec C_0 le montant du capital emprunté et n le nombre d'annuités. On en déduit que :

$$C_0 = m_1\frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = 2800\frac{1,03^5 - 1}{0,03} \simeq 14865,58€.$$

3. Le capital restant dû après le paiement de l'avant dernière annuité est toujours égal au dernier amortissement. Il s'agit ici de $C_4 = m_5 \simeq 3151,42€$.

Exercice 4 :

1. Puisque les 4 amortissements sont constants, on a :

$$4m_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = C_0$$

et donc :

$$m_1 = \frac{C_0}{4} = \frac{10000}{4} = 2500€$$

est le montant de l'amortissement constant.

2. Le tableau d'amortissement prend la forme suivante :

Période n°	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	10000	$10000 \times 0,02 = 200$	2500	$2500 + 200 = 2700$
2	$10000 - 2500 = 7500$	150	2500	2650
3	5000	100	2500	2600
3	2500	50	2500	2550

Exercice 5 : On sait que :

$$\tau_{2015|2014} = 20\% = 0,2 \quad \text{et} \quad \tau_{2016|2015} = -20\% = -0,2$$

et donc

$$I^p_{2015|2014} = 1 + \tau_{2015|2014} = 1,2 \quad \text{et} \quad I^p_{2016|2015} = 1 + \tau_{2016|2015} = 0,8.$$

La règle de circularité des indices indique que :

$$I^p_{2016|2014} = I^p_{2016|2015} I^p_{2015|2014} = 0,8 \times 1,2 = 0,96.$$

On en déduit que :

$$\tau_{2016|2014} = I^p_{2016|2014} - 1 = -0,04 = -4\%.$$

Le prix du produit a diminué de 4% entre 2014 et 2016.