IUT de Dijon-Auxerre
BUT GEA 1re année
Semestre 1
Année universitaire 2024-2025

R1.08 Outils Mathématiques de gestion

Notes et compléments de cours

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr

Préambule

Objectifs, contenus et structure :

L'objectif de ce cours est de fournir des premiers outils mathématiques pour la gestion. Il se veut donc être tourné vers les applications et la pratique, et il met en évidence les liens avec des problèmes concrets de gestion – rencontrés dans d'autres cours, SAÉ ou lors de stage –, tout en permettant une compréhension réelle et fine des concepts présentés. Pour ces raisons, les premières sections de chaque chapitre énoncent précisément les définitions, concepts et résultats clés et les illustrent par des exemples et exercices permettant de mettre en lumière les méthodes principales ; leur lecture est donc essentielle et les TD et TP permettront leurs mises en œuvre. Afin de rendre cette lecture la plus fluide possible, elles ne contiennent que peu de preuves de résultats théoriques, seulement les plus courtes ; ces preuves sont contenues dans la dernière section de chaque chapitre qui peut, dans la plupart des cas, être omise. Pour donner un panorama plus complet et des pistes de réflexion utiles lors de certains projets, des sections de compléments sont intégrées et clairement repérées dans chaque chapitre.

Le premier chapitre est dédié aux matrices et à la résolution de systèmes linéaires. Il est motivé par la modélisation de problèmes de gestion liés à l'utilisation de la totalité d'un stock pour fabriquer des produits finis ou la détermination des quantités de matières premières nécessaires pour la fabrication d'un nombre prescrit de chacun des produits finis. Il pourra être complété par la question de l'optimisation linéaire permettant de déterminer des programmes de production maximisant ou minimisant certaines quantités, comme le bénéfice, le chiffre d'affaire ou l'emprunte énergétique, sous certaines contraintes liées au fonctionnement et aux ressources propres de l'organisation ou même des contraintes externes.

Le deuxième chapitre est consacré aux statistiques descriptives à une variable et sera complété par un chapitre de statistique bivariée au second semestre pour donner des éléments permettant de synthétiser et interpréter des données issues d'enquêtes ou sondages. Il trouve donc des applications naturelles en marketing ou méthodes d'enquêtes par exemple.

Le troisième chapitre présente des fonctions usuelles et certaines de leurs propriétés ainsi que des méthodes de résolution d'équation. Il sera complété au second semestre par un chapitre dédié à l'étude des fonctions et ses applications en économie. Les fonctions présentées seront notamment utilisées en mathématiques financières et en économie.

En complément des CM, TD et TP classiques, des séances de tutorat seront organisées. Après un test de vérification des compétences calculatoires et logiques, certain.e.s étudiant.e.s seront orienté.e.s vers ces séances de façon obligatoire afin de leur permettre de surmonter certaines difficultés encore trop présentes. Ces séances seront également accessibles à tous les étudiant.e.s qui le souhaiteront à condition de s'engager à suivre assidûment l'intégralité du programme de 10 séances d'une heure.

Évaluations :

À préciser.

Avertissement :

Ces notes et compléments de cours ayant été fraîchement rédigés, quelques coquilles peuvent encore y figurer. Le fait de les signaler par courriel sera apprécié.

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre matricielle et systèmes linéaires

Lorsque l'on a plusieurs/un grand nombre de données, il est pratique de pouvoir les synthétiser sous la forme d'un tableau, d'une matrice. Les objectifs de ce chapitre sont d'introduire la notion de matrice et les opérations sur les matrices ainsi que d'établir un lien entre matrices et systèmes linéaires. On discutera également des méthodes de résolution de systèmes linéaires. Ces notions trouvent des applications naturelles en gestion, en particulier, pour déterminer des programmes de production permettant d'épuiser un stock de ressources ou encore de déterminer les ressources nécessaires pour la production de quantités prescrites de produits finis.

1.1 Premières définitions

Définition 1.1. *On appelle* matrice *de taille $m \times n$ et à coefficients réels un tableau de nombres réels constitué de m lignes et n colonnes.*

Notations 1.1.

1. *On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ et à coefficients réels.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. Pour $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $a_{i,j}$ le coefficient situé sur la i^e ligne et dans la j^e colonne de la matrice A. Celle-ci s'écrit alors sous la forme $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.*

Définition 1.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.*

1. *Si $m = 1$, A est appelée vecteur ligne.*
2. *Si $n = 1$, A est appelée vecteur colonne.*
3. *Si $m = n$, A est appelée matrice carrée d'ordre n.*

Exemple 1.1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de taille 3×2, B est une matrice carrée d'ordre 4, X un vecteur ligne de taille 5 et Y un vecteur colonne de taille 4.

Définition 1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ une matrice carrée.*

1. *La matrice A est dite diagonale si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. Si de plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,i} = 1$, la matrice A est appelée matrice identité d'ordre n et est notée I_n.*
2. *La matrice A est dite triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i > j$.*
3. *La matrice A est dite triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$.*

Ainsi, toute matrice diagonale D est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix},$$

la matrice identité d'ordre n est de la forme

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et toute matrice triangulaire supérieure U ou triangulaire inférieure L est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}.$$

1.2 Calcul matriciel

1.2.1 Somme et différence

Définition 1.4. *Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.*

La somme *$A + B$ (resp.* différence *$A - B$) de A et de B est la matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $a_{i,j} + b_{i,j}$ (resp. $a_{i,j} - b_{i,j}$).*

Remarque 1.1. Pour que leur somme et leur différence soient définies, les matrices A et B doivent être de mêmes tailles.

Exemple 1.2. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+4 & 4+1 \\ 2+2 & 5+4 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

et
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-4 & 4-1 \\ 2-2 & 5-4 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1. *1. L'addition de matrices est* associative, *c'est-à-dire que, pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, on a :*

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

On notera simplement cette somme $A+B+C$.

2. L'addition de matrices est commutative, *c'est-à-dire que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, on a :*

$$A+B = B+A.$$

3. La matrice $\mathbf{0}_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls est l'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, on a :

$$A + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + A = A.$$

Définition 1.5. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.*
On appelle opposée *de A la matrice $-A = (-a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.*

Remarque 1.2. On a ainsi :
$$A + (-A) = \mathbf{0}_{m,n}.$$

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 1.6. *Soient $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.*
Le produit *αA est la matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $\alpha a_{i,j}$.*

Remarque 1.3. En particulier $(-1) \times A = -A$.

Exemple 1.3. On a :
$$7 \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 14 & 35 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.*
On a :

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

1.2.3 Multiplication

Définition 1.7. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

On appelle produit *de* A *par* B *la matrice* $C = (c_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ *dont les coefficients sont donnés par :*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Cette matrice est notée AB *ou* $A \times B$.

Remarque 1.4.

1. Pour que le produit AB soit défini, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite.
2. le coefficient $c_{i,j}$ est le produit (scalaire) de la i^{e} ligne de A par la j^{e} colonne de B.

Exemple 1.4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times 0 + 2\times(-1) \\ 3\times 2 + 4\times 1 & 3\times 0 + 4\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 3 & 2\times 2 + 0\times 4 \\ 1\times 1 + (-1)\times 3 & 1\times 2 + (-1)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On observe que $AB \neq BA$; cet exemple montre que, même si les produits AB et BA sont définis et de même taille, ils ne sont, en général, pas égaux. Le produit matriciel **n'est pas commutatif**.

Le produit CB n'est pas défini mais le produit BC l'est et vaut :

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 3 & 2\times 2 + 0\times 7 & 2\times 0 + 0\times 4 \\ 1\times 1 + (-1)\times 3 & 1\times 2 + (-1)\times 7 & 1\times 0 + (-1)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.

1. *Le produit matriciel* **n'est pas commutatif**, *c'est-à-dire qu'en général* $AB \neq BA$.
2. *La matrice identité d'ordre* n, I_n, *est l'élément neutre du produit matriciel dans* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, *c'est-à-dire que, pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, *on a :*

$$AI_n = I_n A = A.$$

3. *Lorsque tous les produits sont définis, on a :*

$$(AB)C = A(BC).$$

On notera simplement ce produit ABC*.*

Définition 1.8. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ *une matrice carrée.*

Sous réserve d'existence, on appelle inverse *de* A *la matrice* B *telle que* $AB = BA = I_n$*. Si elle existe, cette matrice est notée* A^{-1}*.*

Remarque 1.5. En fait, il suffit que l'une des identités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ soit vérifiée pour pouvoir affirmer que $B = A^{-1}$.

Exemple 1.5. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times (-1) + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = I_2.$$

La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est, quant à elle, pas inversible. Vérifions ceci en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe a, b, c et d tels que

$$B \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2.$$

En effectuant le produit

$$B \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

puis en identifiant coefficient par coefficient avec I_2, on obtient que $1 = a + b = 0$. Absurde. Ainsi, B n'est pas inversible.

Proposition 1.4. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ *deux matrices inversibles.*

La matrice AB *est inversible et on a :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve : On a :

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

□

Notation 1.2. *Pour $n \in \mathbf{N}$, on note :*

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\,fois}$$

avec la convention $A^0 = I$.

1.2.4 Transposition

Définition 1.9. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.*

On appelle transposée *de A la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ telle que pour tous i, j, $b_{i,j} = a_{j,i}$. Cette matrice est notée ${}^tA$ ou A^T.*

Exemple 1.6. La transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

est la matrice

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5. *Soient A, B deux matrices et $\alpha \in \mathbf{R}$*

1. *On a :*
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T et \left(A^T\right)^T = A.$$
2. *Si A et B sont de même taille, on a :*
$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$
3. *Si le produit AB est bien défini, on a :*
$$(AB)^T = B^T A^T.$$
4. *Si A est inversible, alors sa transposée est inversible et on a :*
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Preuve : Les deux premiers points sont évidents. Pour le troisième, il suffit d'écrire :

$$\left[(AB)^T\right]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_k a_{j,k} b_{k,i} = \sum_k b_{k,i} a_{j,k} = \sum_k (b^T)_{i,k} (a^T)_{k,j} = [B^T A^T]_{i,j};$$

et pour le quatrième :

$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1} A\right)^T = I^T = I.$$

□

1.3 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1.10. *On appelle* système de m équations (linéaires) à n inconnues *toute collection de m équations faisant intervenir n variables $x_1, \ldots, x_n$. Un tel système se présente sous la forme :*

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = & y_m \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et y_i sont connus.

Des systèmes d'équations apparaissent naturellement dans des domaines variés dont la gestion. C'est en particulier le cas lorsque l'on doit respecter simultanément des contraintes portant sur les mêmes variables.

Exemple 1.7. Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2 en utilisant deux matières premières M_1 et M_2. Plus précisément, la production d'une unité de P_1 nécessite 2Kg de M_1 et 3Kg de M_2 et production d'une unité de P_2 nécessite 1Kg de M_1 et 4Kg de M_2. En notant x_1 la quantité de P_1 produite, x_2 la quantité de P_2 produite, y_1 la quantité de M_1 utilisée (en Kg) et y_2 la quantité de M_2 utilisée (en Kg), on peut voir que :

— la quantité y_1 de M_1 utilisée pour produire x_1 unités de P_1 et x_2 unités de P_2 n'est autre que $2x_1 + x_2$ et donc
$$2x_1 + x_2 = y_1;$$

— la quantité y_2 de M_2 utilisée pour produire x_1 unités de P_1 et x_2 unités de P_2 n'est autre que $3x_1 + 4x_2$ et donc
$$3x_1 + 4x_2 = y_2.$$

Les quantités de produits et de matières premières utilisées par l'entreprise sont donc liées par le système :

$$(\mathrm{S}_1) \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 & +x_2 & = y_1 \\ 3x_1 & +4x_2 & = y_2 \end{array} \right. .$$

Bien sûr, si l'on connait les quantités x_1 et x_2 que souhaite produire l'entreprise, ceci permet de trouver immédiatement les quantités de matières premières y_1 et y_2 nécessaires. Si au contraire, on connait les quantités de matières premières y_1 et y_2 disponibles en stock, on pourra déterminer s'il existe un programme de production épuisant les stocks en résolvant le système, c'est-à-dire en déterminant les valeurs de x_1 et x_2.

Remarque 1.6.

1. On remarquera, dans l'exemple précédant, que l'on a écrit une équation par ressource (ou matière première) et non pas par produit fini. Ceci est un fait général pour ce type de problème de modélisation.

2. Un système linéaire n'admet pas nécessairement une unique solution ; il peut ne pas admettre de solution comme en admettre une infinité.

1.3.1 Écriture matricielle

En effectuant le produit matriciel et en identifiant coefficient par coefficient, on obtient que l'équation matricielle :

$$AX = Y,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

est équivalente au système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = & y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = & y_m \end{cases}$$

Définition 1.11. *Avec les notations précédentes, on appelle $AX = Y$* écriture matricielle du système (S)*.*

Exemple 1.8. Le système (S_1) de l'Exemple 1.7, s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$(\mathrm{S}_2) \begin{cases} 2x_1 & +8x_2 & +12x_3 & = 34 \\ x_1 & +4x_2 & +8x_3 & = 19 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 19 \end{cases}$$

s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.12. *Soit* (S) *un système dont l'écriture matricielle est $AX = Y$.*

On dit que (S) *est* carré *(resp.* diagonal, triangulaire supérieur, triangulaire inférieur*) si A est carrée (resp. diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure).*

1.3.2 Résolution

On s'intéresse à la résolution de systèmes linéaires et on suppose, pour toute la suite du chapitre, que les systèmes et matrices considérés sont carrés de taille n.

Il a déjà été mentionné qu'un système linéaire n'admet pas nécessairement une solution unique. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système carré admette une unique solution et peut être complété d'une autre condition équivalente basée sur la notion de déterminant (voir Section 1.5).

Théorème 1.1. *Soit* (S) *un système linéaire carré dont l'écriture matricielle est* $AX = Y$*.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (S) *admet une unique solution,*
2. A *est inversible,*

Si l'une des conditions précédentes est vérifiée, la solution du système (S) *est donnée par* $X = A^{-1}Y$*.*

Remarque 1.7. Si $\det(A) = 0$ le système n'admet pas de solution ou admet une infinité de solution.

Certains systèmes linéaires sont extrêmement simples à résoudre. C'est le cas des systèmes diagonaux et triangulaires. En effet, la solution d'un système diagonal :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 = y_1 \\ \quad\vdots \quad \vdots \\ a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

est clairement

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{a_{1,1}} \\ \ \vdots \quad \vdots \\ x_n = \frac{y_n}{a_{n,n}} \end{cases}$$

sous réserve que tous les $a_{i,i}$ soient non nuls. Si le système est triangulaire supérieur, avec tous les $a_{i,i}$ non nuls,

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = y_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n,n}x_n & = y_n \end{cases}$$

la dernière équation permet de déterminer x_n. On peut ensuite déterminer x_{n-1} à l'aide de la valeur de x_n maintenant connue et de l'avant dernière équation. En *remontant* de proche en proche, on peut déterminer les valeurs de $x_1, \dots, x_n$ en ne résolvant qu'une équation du premier degré à chaque étape.

Le fait que les systèmes diagonaux et triangulaires soient particulièrement simples à résoudre a inspiré des méthodes de résolution de systèmes carrés généraux telles que la *méthode de Gauss* et la *méthode de Gauss-Jordan*. L'idée est, dans les deux cas, de se ramener par des opérations élémentaires sur les lignes du système à un système équivalent et triangulaire ou diagonal. Ces méthodes seront présentées dans les deux sous-paragraphes suivants.

Définition 1.13. *On appelle* opérations élémentaires sur les lignes *les opérations suivantes :*

1. *l'intervertion de deux lignes,*
2. *la multiplication une ligne par un scalaire,*
3. *l'ajout du produit d'un scalaire et d'une ligne à une* **autre** *ligne.*

Proposition 1.6. *Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système en un système équivalent.*

Les méthodes de Gauss et Gauss-Jordan consistent à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système pour le réduire à un système triangulaire ou diagonal. Par souci de concision et de légèreté des notations, on présentera le système lors de ces étapes sous la forme d'un tableau faisant apparaitre dans sa partie gauche la matrice A associée au système et dans sa partie droite le membre de droite du système, les deux étant séparés par une barre verticale. Le système dont l'écriture matricielle est :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sera donc représenté par :

$$\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & y_n \end{array}.$$

Attention : les opérations sur les lignes s'entendent sur l'intégralité de la ligne (membre de droite y compris) et seules les opérations élémentaires de la Définition 1.13 ne doivent être employées, au risque de transformer un système en un système qui ne lui est pas équivalent.

Méthode de Gauss

Cette méthode se déroule en deux temps. Le principe est de transformer, dans un premier temps, le système présenté sous la forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & y_n \end{array}$$

en un système triangulaire équivalent avec des 1 sur la diagonale :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \star & \vdots \\ & & & 1 & \star \end{array}.$$

La deuxième phase est une phase de remontée permettant d'obtenir la solution de ce dernier système qui est la même que celle du système d'origine.

L'algorithme itératif suivant présente la phase de réduction lors de la résolution d'un système $n \times n$ d'équations linéaires par la méthode de Gauss. Avec un léger abus de notation, on notera $a_{i,j}$ et y_i les coefficients apparaissant dans le tableau à l'étape courante. Les valeurs des $a_{i,j}$ et y_i changent donc d'une étape à l'autre. On notera L_i la i^{e} ligne du tableau et C_j sa j^{e} colonne.

Algorithme 1.1 (Méthode de Gauss - Phase de réduction)**.**
Pour i variant de 1 à n :

1. *Si $a_{i,i} = 0$, échanger L_i avec une des lignes L_j pour un $j > i$ telle que $a_{j,i} \neq 0$; si un tel échange n'est pas possible, s'arrêter et conclure que le système n'admet pas une unique solution.*

2. *Remplacer la* L_i *par* $\frac{1}{a_{i,i}} L_i$.
3. *Pour* j *variant de* $i+1$ *à* n *:*
   Remplacer L_j *par* $L_j - a_{j,i} L_i$.

Remarque 1.8.

1. À la i^{e} itération, le coefficient $a_{i,i}$ est appelé i^{e} *pivot.*
2. Si le système admet une unique solution, l'algorithme ne s'arrêtera pas durant l'étape 1.. On peut, pour s'en assurer, calculer le déterminant de la matrice associée au système.
3. À la i^{e} itération, l'étape 2 permet de mettre un 1 au niveau du i^{e} coefficient diagonal.
4. À la i^{e} itération, l'étape 3 permet de mettre à 0 tous les coefficients de la colonne C_i situés en dessous du coefficient diagonal.
5. À la n^{e} itération, l'étape 3 ne contient aucune opération (il n'y a rien à faire).

La sortie de cet algorithme est un tableau de la forme :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,n} & b_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a'_{n-1,n} & \vdots \\ & & & 1 & b_n \end{array}$$

correspondant au système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + a'_{1,2} x_2 + \dots + a'_{1,n} x_n & = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots \\ x_{n-1} + a'_{n-1,n} x_n & = b_{n-1} \\ x_n & = b_n \end{array} \right. .$$

Un tel système se résout aisément par remontée (on connait déjà la valeur de x_n !) en utilisant l'algorithme suivant.

Algorithme 1.2 (Méthode de Gauss - Phase de remontée)**.**
Affecter à x_n *la valeur* b_n.
Pour i *descendant de* $n-1$ *à* 1 *:*

1. *Remplacer* $x_{i+1}, \dots, x_n$ *par leurs valeurs déjà trouvées dans* L_i.
2. *Résoudre en* x_i *l'équation du premier degré apparaissant dans la ligne* L_i.

Sortie : $x_1, \dots, x_n$ *solution du système.*

Remarque 1.9. Alternativement, on peut remplacer les étapes 1. et 2. par : *Affecter à* x_i *la valeur :*

$$b_i - a'_{i,i+1} x_{i+1} - \dots - a'_{i,n} x_n.$$

Exemple 1.8 (suite)**.** Reprenons l'exemple du système (S_2) de l'Exemple 1.8. Rappelons que celui-ci s'écrit matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Nous allons le résoudre en utilisant l'algorithme de Gauss et une présentation sous forme de tableaux. La phase de réduction/triangularisation débute avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 12 & 34 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}.$$

Le premier pivot est 2 (non nul). On effectue l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array},$$

puis les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \end{array}.$$

Le candidat à être le deuxième pivot est nul ; on intervertit donc les lignes L_2 et L_3 :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

Le deuxième pivot est alors -8 (non nul). On effectue l'opération $L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

Le coefficient sous le coefficient diagonal dans la deuxième colonne est déjà 0 ; on passe directement à l'étape suivante. Le troisième pivot est 2. On divise donc les coefficients de la ligne L_3 par 2 pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}.$$

Le tableau est sous forme triangulaire et n'a que des 1 sur la diagonale ; la première phase est terminée. La phase de remontée débute en écrivant le système correspondant à ce tableau (et équivalent à (S_2)) :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 17 \\ & x_2 & +2x_3 & = 4 \\ & & x_3 & = 1 \end{array}\right..$$

On sait déjà que $x_3 = 1$. En remplaçant x_3 par 1 dans la deuxième ligne, on déduit que $x_2 = 2$. Ensuite, en remplaçant x_2 par 2 et x_3 par 1 dans la première ligne, on déduit que $x_1 = 3$. On obtient ainsi que la solution de ce système est :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode de Gauss-Jordan

Cette méthode se déroule en une seule phase, mais chaque étape nécessite un peu plus de calculs que pour la méthode de Gauss. Le principe est de transformer le système présenté sous la forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & y_n \end{array}$$

en un système diagonal équivalent. En fait, on fera en sorte qu'à la fin de l'exécution de l'algorithme, la partie gauche du tableau soit la matrice identité I_n. La solution du système sera alors simplement le membre de droite du tableau

L'algorithme itératif suivant la résolution d'un système $n \times n$ d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan. Toujours avec le même abus de notation, $a_{i,j}$ et y_i désignerons les coefficients apparaissant dans le tableau à l'étape courante. Les valeur des $a_{i,j}$ et y_i changent donc d'une étape à l'autre.

Algorithme 1.3 (Méthode de Gauss-Jordan)**.**
Pour i variant de 1 à n :

1. *Si* $a_{i,i} = 0$*, échanger* L_i *avec une des lignes* L_j *pour un* $j > i$ *telle que* $a_{j,i} \neq 0$ *; si un tel échange n'est pas possible, s'arrêter et conclure que le système n'admet pas une unique solution.*
2. *Remplacer la* L_i *par* $\frac{1}{a_{i,i}} L_i$*.*
3. *Pour* j *variant de* 1 *à* n **à l'exception de** i *:*
   Remplacer L_j *par* $L_j - a_{j,i} L_i$*.*

Remarque 1.10.

1. À la i^{e} itération, le coefficient $a_{i,i}$ est appelé i^{e} *pivot.*
2. Si le système admet une unique solution, l'algorithme ne s'arrêtera pas durant l'étape 1.. On peut pour s'en assurer calculer le déterminant de la matrice associée au système.
3. À la i^{e} itération, l'étape 2 permet de mettre un 1 au niveau du i^{e} coefficient diagonal.
4. À la i^{e} itération, l'étape 3 permet de mettre à 0 tous les coefficients de la colonne C_i à l'exception du coefficient diagonal.

Exemple 1.8 (suite)**.** Reprenons l'exemple du système (S_2) de l'Exemple 1.8 et résolvons le, cette fois, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan et une présentation sous forme de tableaux. On débute avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 12 & 34 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array} .$$

Le premier pivot est 2 (non nul). On effectue l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 1 & 4 & 8 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array} ,$$

puis les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \end{array}\right).$$

Le candidat à être le deuxième pivot est nul ; on intervertit donc les lignes L_2 et L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Le deuxième pivot est alors -8 (non nul). On effectue l'opération $L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2$ pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Remarquons que c'est à partir d'ici que la méthode de Gauss-Jordan diffère de la méthode de Gauss dans cet exemple. On réalise l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$ pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Le troisième pivot est 2. On divise donc les coefficients de la ligne L_3 par 2 pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

On retrouve que, comme nous l'avions vu avec la méthode de Gauss, la solution de ce système est :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Application à l'inversion de matrice

Si une matrice A est inversible, la i^{e} colonne de son inverse A^{-1} n'est autre que la solution de l'équation matricielle $AX = e_i$, où e_i est le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire, le vecteur :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}}\text{ligne.}$$

Ainsi, déterminer l'inverse d'une matrice revient à résoudre les n systèmes linéaires dont les écritures matricielles sont $AX = e_1, \ldots, AX = e_n$. Ceci peut être fait simultanément en utilisant la méthode de Gauss-Jordan avec pour membre de droite la matrice identité I_n. En d'autre terme, on débutera la méthode de Gauss-Jordan avec le tableau :

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & \ldots & \ldots & a_{1,n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}.$$

À la fin de l'exécution de l'algorithme de Gauss-Jordan à partir de ce tableau, on obtiendra un tableau contenant dans son membre de droite l'inverse de la matrice A

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \end{array} \hspace{-1em} \underbrace{\begin{array}{cccc} \star & \ldots & \ldots & \star \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \star & \ldots & \ldots & \star \end{array}}_{=A^{-1}}.$$

Exemple 1.8 (suite)**.** Reprenons l'exemple du système (S_2) de l'Exemple 1.8 et déterminons l'inverse de la matrice A en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan et une présentation sous forme de tableaux. On débute avec le tableau :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Le premier pivot est 2 (non nul). On effectue l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

puis les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}.$$

Le candidat à être le deuxième pivot est nul ; on intervertit donc les lignes L_2 et L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Le deuxième pivot est alors -8 (non nul). On effectue l'opération $L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2$ pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On réalise, en suite, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$ pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Le troisième pivot est 2. On divise donc les coefficients de la ligne L_3 par 2 pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve que la solution de (S_2) lorsque

$$Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}$$

est

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le fait d'avoir déterminé l'inverse de A permet de trouver rapidement, sans trop d'efforts, la solution de (S_2) si l'on change arbitrairement son membre de droite. Plus précisément, ceci permet de résoudre, par un simple produit matriciel, tout système de la forme :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 2x_1 & +8x_2 & +12x_3 & = y_1 \\ x_1 & +4x_2 & +8x_3 & = y_2 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = y_3 \end{cases} \qquad \text{pour } y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R}.$$

Par exemple, la solution de (S) avec pour membre de droite par

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

est

$$X' = A^{-1}Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Prolongement : introduction à la programmation linéaire

Une classe de problèmes mathématiques d'une grande importance pratique est regroupée sous la dénomination *problèmes d'optimisation.* Il s'agit de trouver le *minimum* ou le *maximum* d'une certaine fonction f, de n variables, sous d'éventuelles contraintes portant sur ces variables. Lorsque la fonction f est linéaire (*i.e.* s'écrit sous la forme $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$) et les contraintes sont des équations ou inéquations linéaires, on parle de *problème d'optimisation linéaire* ou de *programmation linéaire.* Un tel problème s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{rl} \textbf{minimiser} \text{ ou } \textbf{maximiser} & z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\ \textbf{sous les contraintes} & \\ a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n & = b_i \\ a_{i+1,1}x_1 + \cdots + a_{i+1,n}x_n & \leq b_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n & \leq b_j \\ a_{j+1,1}x_1 + \cdots + a_{j+1,n}x_n & \geq b_{j+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n & \geq b_k \\ x_1, \dots, x_n & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Bien entendu, il peut ne pas y avoir de contrainte du type « $=$ », « $\leq$ » ou « $\geq$ ». De tels problèmes apparaissent naturellement dans des situations pratiques comme le montre l'exemple suivant ; il convient alors de définir rigoureusement, les *variables*, *objectif* et *contraintes* du problème.

Exemple 1.9. Un industriel fabrique deux alliages A_1 et A_2 à partir de deux métaux M_1 et M_2 qu'il vend en lingots de $500g$. L'alliage A_1 est composé à 20% de M_1 et à 80% de M_2 alors que l'alliage A_2 est composé à 60% de M_1 et à 40% de M_2. Des contraintes techniques font qu'il ne peut produire plus de 150 lingots par mois. La marge brute réalisée sur la vente d'un lingot de A_1 est de 15€ et la marge brute réalisée sur la vente d'un lingot de A_2 est de 17€. Il a en stock $30Kg$ de M_1 et $50Kg$ de M_2 pour le mois. L'industriel souhaite, naturellement, maximiser la marge brute qu'il réalisera au cours du mois.

Nous détaillons ci-dessous le processus nous permettant de nous ramener à un problème d'optimisation linéaire.

Définition des variables : Notons :

— x_1 le nombre de lingots de A_1 fabriqués par l'industriel ce mois ci,
— x_2 le nombre de lingots de A_2 fabriqués par l'industriel ce mois ci.

Définition de l'objectif : L'objectif est de maximiser la marge brute mensuelle de l'industriel. Celle-ci dépend du nombre x_1 de lingots de A_1 et du nombre x_2 de lingots de A_2 fabriqués ce mois. Puisque la marge brute réalisée sur la vente d'un lingot de A_1 est de 15€ et la marge brute réalisée sur la vente d'un lingot de A_2 est de 17€, la marge brute totale de l'industriel est données par :

$$15x_1 + 17x_2.$$

L'objectif est donc de maximiser $z = 15x_1 + 17x_2$.

Définition des contraintes :

— *Contrainte liée à la quantité de M_1 disponible :* Dans un lingot de A_1, 20% des $500g$ qu'il pèse, c'est-à-dire $100g$, est du M_1. Dans un lingot de A_2, 60% des $500g$ qu'il pèse, c'est-à-dire $300g$, est du M_1. La masse totale de M_1 utilisée $100x_1 + 300x_2g$ ne peut pas excéder la quantité totale de M_1 disponible dans les stocks, c'est-à-dire $30000g$ (soit $30Kg$). On obtient donc une première contrainte :

$$100x_1 + 300x_2 \leq 30000$$

qui est équivalente à :

$$x_1 + 3x_2 \leq 300.$$

— *Contrainte liée à la quantité de M_2 disponible :* Dans un lingot de A_1, 80% des $500g$ qu'il pèse, c'est-à-dire $400g$, est du M_2. Dans un lingot de A_2, 40% des $500g$ qu'il pèse, c'est-à-dire $200g$, est du M_2. La masse totale de M_2 utilisée $400x_1 + 200x_2g$ ne peut pas excéder la quantité totale de M_2 disponible dans les stocks, c'est-à-dire $50000g$ (soit $50Kg$). On obtient donc une première contrainte :

$$400x_1 + 200x_2 \leq 50000$$

qui est équivalente à :

$$4x_1 + 2x_2 \leq 500.$$

— *Contrainte technique :* On sait que l'industriel ne peut produire plus de 150 lingots par mois. On doit donc avoir :

$$x_1 + x_2 \leq 150.$$

— *Contraintes de « bon sens » :* Bien entendu, l'industriel ne peut fabriquer qu'un nombre entier positif ou nul de lingots de chaque sorte et on doit avoir $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$. Pour des raisons techniques, nous relâchons cette contrainte en $x_1, x_2 \geq 0$.

Formulation du problème : Nous pouvons maintenant résumer ce que nous venons de voir en formulant le problème :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{rl} \textbf{maximiser} & z = 15x_1 + 17x_2 \\ \textbf{s.l.c.} & \\ x_1 + 3x_2 & \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq 500 \\ x_1 + x_2 & \leq 150 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

S'il est non vide, le domaine défini par les contraintes d'un problème d'optimisation linéaire (à n variables) est un polyèdre (polygone si $n = 2$) convexe $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé *ensemble admissible*. Les sommets de ce polygone *saturent* au moins n contraintes du problème (*i.e.* leurs coordonnées vérifient toutes les contraintes et au moins n contraintes sont vérifiées avec égalité). En fait, exactement n contraintes sont saturées sauf dans les cas pathologiques.

On peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1.7. *Si le domaine défini par les contraintes d'un problème d'optimisation linéaire* (P) *est borné, alors le problème* (P) *admet une solution atteinte en au moins un sommet de ce domaine.*

1.4.1 Méthode graphique

Lorsque le nombre n de variables d'un problème d'optimisation linéaire est faible (essentiellement $n = 2$), il est possible de le résoudre de façon graphique. Nous travaillerons ici en dimension 2, c'est-à-dire avec deux variables x_1 et x_2, pour optimiser, sous contraintes linéaires, une fonction objectif de la forme $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Pour cela, on commence par tracer le polygone $\mathcal{D}$ défini par les contraintes : on trace, pour chaque contrainte la droite représentant le cas de l'égalité, puis on détermine le demi-espace vérifiant la contrainte (celui situé « au-dessus » ou « au-dessous » de la droite).

Exemple 1.9 (suite)**.** Reprenons l'Exemple 1.9. La première contrainte est $x_1 + 3x_2 \leq 300$; après avoir tracé la droite limite d'équation $x_1 + 3x_2 = 300$ (ou de manière équivalente $x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1$), on repère la partie de l'espace située en-dessous de cette droite puisque les variables doivent vérifier une inégalité du type « $\leq$ ».

La deuxième contrainte est $4x_1 + 2x_2 \leq 500$; après avoir tracé la droite limite d'équation $4x_1 + 2x_2 = 500$ (ou de manière équivalente $x_2 = 250 - 2x_1$), on repère la partie de l'espace située en-dessous de cette droite puisque les variables doivent vérifier une inégalité du type « $\leq$ ».

La troisième contrainte est $x_1 + x_2 \leq 150$; après avoir tracé la droite limite d'équation $x_1 + x_2 = 150$ (ou de manière équivalente $x_2 = 150 - x_1$), on repère la partie de l'espace située en-dessous de cette droite puisque les variables doivent vérifier une inégalité du type « $\leq$ ».

N'oublions pas les contraintes $x_1, x_2 \geq 0$ qui indiquent que les variables se situent dans le premier quadrant (quart nord-est) du plan.

Le domaine $\mathcal{D}$ est celui constitué des points vérifiant toutes les conditions listées ci-dessus ; il est représenté dans la Figure 1.1.

Une fois ce domaine tracé, on trace la ligne de niveau $z = 0$ de la fonction objectif, c'est-à-dire la droite d_0 d'équation $0 = z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ainsi qu'un vecteur normal à cette droite (*i.e.* une « flèche perpendiculaire à cette droite ») orienté dans le sens de la direction d'amélioration. Il faut alors faire attention à la nature du problème :

— s'il s'agit d'un problème de *maximisation*, on veut aller dans le sens des niveaux z de plus en plus élevés ;

— s'il s'agit d'un problème de *minimisation*, on veut aller dans le sens des niveaux z de moins en moins élevés.

Il suffit alors de « décaler » la droite d_0 dans le sens de la flèche et de s'arrêter juste avant de quitter le domaine $\mathcal{D}$. On trace en fait différentes lignes de niveau d_{z^*} d'équation $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. La valeur optimale est alors le niveau z^* de la dernière droite tracée et est

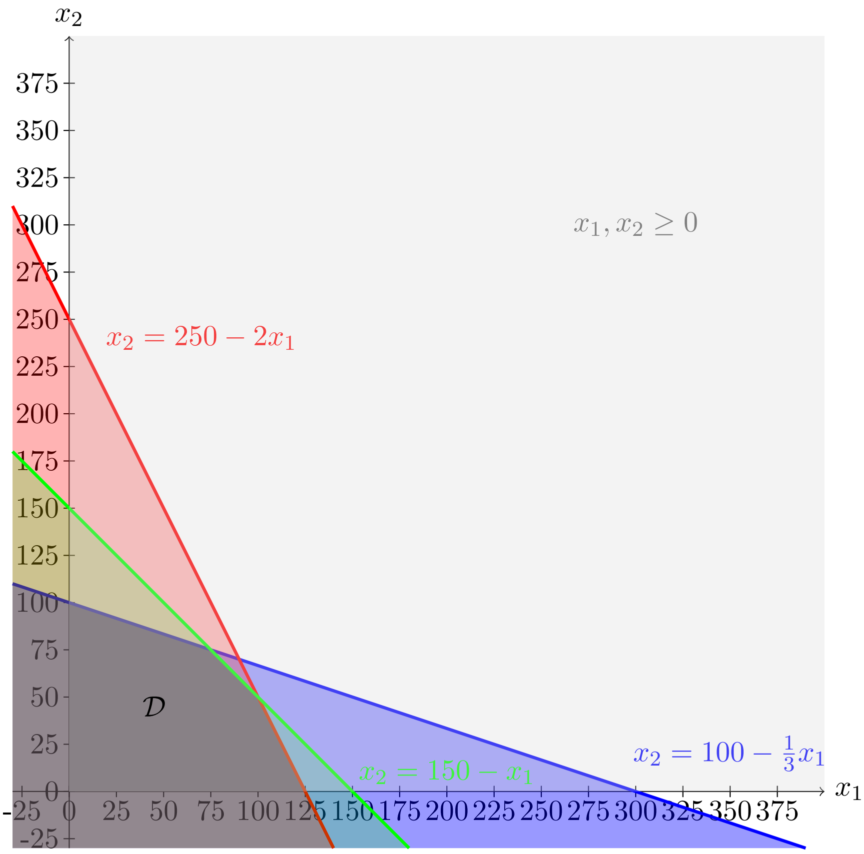

FIGURE 1.1 – Domaine $\mathcal{D}$ (gris) du problème d'optimisation linéaire de l'Exemple 1.9 défini par les contraintes $x_1 + 3x_2 \leq 300$ (bleu), $4x_1 + 2x_2 \leq 500$ (rouge), $x_1 + x_2 \leq 150$ (vert) et $x_1, x_2 \geq 0$ (gris clair).

atteinte en tout point de $\mathcal{D} \cap d_{z^*}$. Dans les bons cas, $\mathcal{D} \cap d_{z^*}$ est réduit à un point et la solution est unique.

Exemple 1.9 (suite)**.** Reprenons l'Exemple 1.9. On a déjà tracé le polygone $\mathcal{D}$ défini par les contraintes. Après avoir tracé la ligne de niveau 0 de la fonction objectif $(x_1, x_2) \longmapsto 15x_1 + 17x_2$, c'est-à-dire $d_0 : 15x_1 + 17x_2 = 0$ (en bleu sur la Figure 1.2), on a déterminé la direction d'amélioration, représentée par une flèche rouge sur cette même figure. Pour cela on s'est souvenu qu'il s'agit d'un problème de maximisation et que l'on cherche donc à « faire monter » le niveau z des lignes de niveau considérées. En « poussant » progressivement la ligne de niveau dans le sens d'amélioration, on voit que le meilleur niveau possible est $z^* = 2400$. La ligne de niveau correspondante est représentée en vert sur la Figure 1.2. On voit aussi que cette ligne de niveau ne rencontre $\mathcal{D}$ qu'en le point $(x_1^*; x_2^*) = (75; 75)$; l'unique solution du problème d'optimisation est donc atteinte en ce point.

Ainsi, pour maximiser sa marge brute mensuelle, l'industriel devra produire 75 lingots de chacun des deux alliages.

Remarque 1.11. La méthode graphique est facilement réalisable en dimension deux, mais

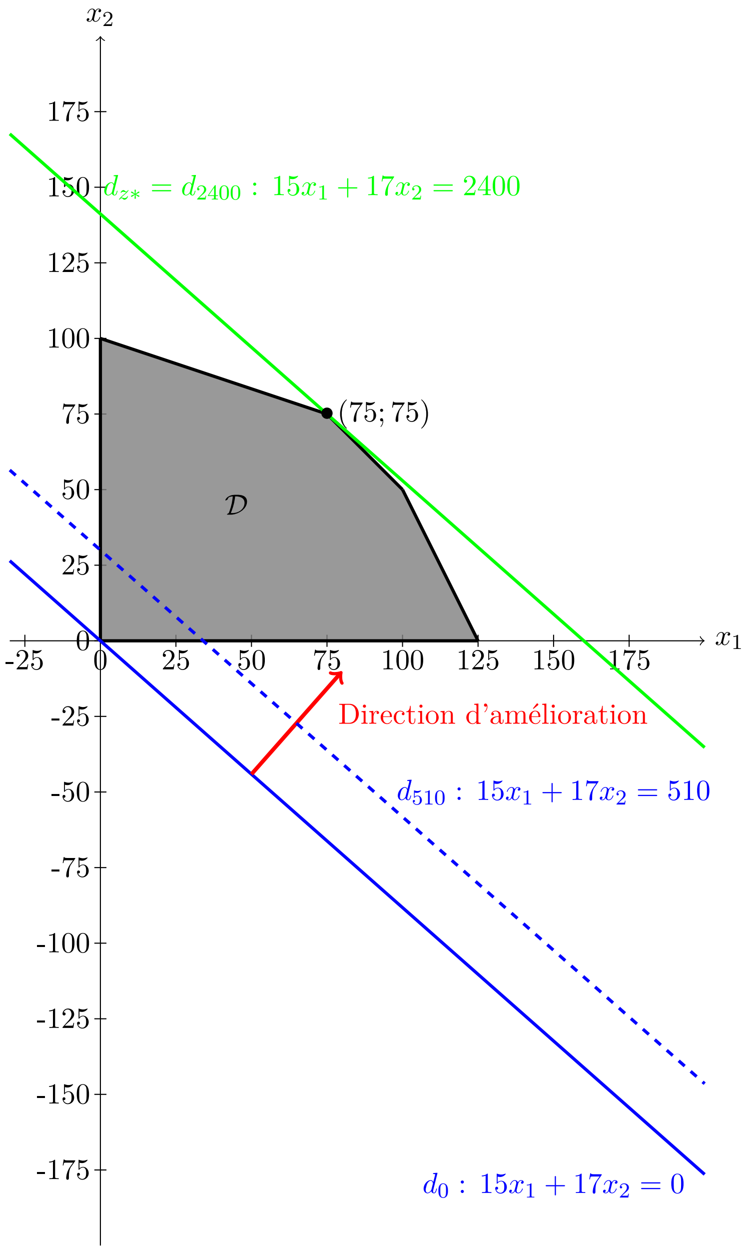

FIGURE 1.2 – Illustration de la résolution du problème d'optimisation linéaire de l'Exemple 1.9 par la méthode graphique.

difficilement applicable en dimension plus grande. Il existe d'autres méthodes, basées sur des algorithmes, permettant une résolution plus efficace de problèmes d'optimisation. Une introduction à l'une d'elle, la *méthode du simplexe*, se trouve dans la Sous-section 1.4.3.

1.4.2 Forme standard d'un problème d'optimisation linéaire

Définition 1.14. *On dit qu'un problème d'optimisation linéaire est sous* forme standard *si toutes les contraintes intervenant dans ce problème sont des contraintes d'égalité à l'exception des contraintes de positivité des variables.*

Remarque 1.12.

1. Quitte à y introduire des variables supplémentaires qui n'interviendront pas dans l'expression de l'objectif, dites *variables d'écart*, tout problème d'optimisation linéaire peut être ramené à un problème sous forme standard. En effet, l'inégalité :

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i,$$

est équivalente à l'égalité :

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n + e_i = b_i,$$

où $e_i \geq 0$ est une *variable d'écart (positive)*. De la même manière, l'inégalité :

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \geq b_i,$$

est équivalente à l'égalité :

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n - e_i = b_i,$$

où $e_i \geq 0$ est une *variable d'écart (positive)*.
Les variables d'écart mesurent la distance (l'écart) séparant un point vérifiant une contrainte du bord de la région délimitée par celle-ci.

2. Un problème d'optimisation linéaire sous forme standard :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \textbf{minimiser} \text{ ou } \textbf{maximiser} & z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\ \textbf{sous les contraintes} & \\ \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n & = b_k \\ \quad\quad\quad x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \end{array} \right.$$

peut toujours être écrit de manière compacte en utilisant des notations matricielles. L'*écriture matricielle* du problème (P) est :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \textbf{minimiser} \text{ ou } \textbf{maximiser} & z = CX \\ \textbf{sous les contraintes} & \\ \quad\quad AX & = B \\ \quad x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.9 (suite)**.** Reprenons l'Exemple 1.9 et le problème d'optimisation :

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{rl}\textbf{maximiser} & z = 15x_1 + 17x_2\\ \textbf{s.l.c.} & \\ x_1 + 3x_2 & \leq 300\\ 4x_1 + 2x_2 & \leq 500\\ x_1 + x_2 & \leq 150\\ x_1, x_2 & \geq 0\end{array}\right. .$$

L'inégalité $x_1 + 3x_2 \leq 300$ est équivalente à $x_1 + 3x_2 + e_1 = 300$ avec $e_1 \geq 0$, l'inégalité $4x_1 + 2x_2 \leq 500$ est équivalente à $4x_1 + 2x_2 + e_2 = 500$ avec $e_2 \geq 0$ et l'inégalité $x_1 + x_2 \leq 150$ est équivalente à $x_1 + x_2 + e_3 = 150$ avec $e_3 \geq 0$. Ainsi, le problème standard équivalent à (P) est :

$$(\mathrm{P_S})\left\{\begin{array}{rl}\textbf{maximiser} & z = 15x_1 + 17x_2\\ \textbf{s.l.c.} & \\ x_1 + 3x_2 + e_1 & = 300\\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 & = 500\\ x_1 + x_2 + e_3 & = 150\\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 & \geq 0\end{array}\right. .$$

Celui-ci s'écrit matriciellement sous la forme :

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{rl}\textbf{minimiser}\text{ ou }\textbf{maximiser} & z = CX\\ \textbf{sous les contraintes} & \\ AX & = B\\ x_1, \dots, x_n & \geq 0\end{array}\right. ,$$

où

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}300\\ 500\\ 150\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}15 & 17 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}.$$

1.4.3 Introduction à la méthode du simplexe

La *méthode du simplexe*, introduite par Dantzig en 1947, est basée sur l'idée suivante. Si l'ensemble admissible $\mathcal{D}$ d'un problème d'optimisation linéaire est non vide et borné, on sait que la solution est atteinte en au moins un sommet de $\mathcal{D}$. La première étape est donc de déterminer un sommet de départ S. Ensuite, on regarde s'il est possible d'améliorer (strictement) l'objectif le long d'une des arêtes de $\mathcal{D}$ émanant de S. Il faut être attentif à la nature du problème lors de cette étape : s'il s'agit d'un problème de maximisation (resp. minimisation), on cherche à augmenter (resp. diminuer) la valeur de la fonction objectif. Si une telle arête existe, on détermine l'arête permettant la plus forte amélioration et on sélectionne le sommet situé à l'autre extrémité de l'arête. Si une telle arête n'existe pas, on s'arrête et on conclue que l'on a trouvé la solution optimale. On itère cette procédure en partant du dernier sommet sélectionné jusqu'à s'arrêter et avoir trouvé la solution optimale.

La sélection d'un sommet initial n'est, en général, pas triviale. Elle est pourtant aisée lorsque toutes les contraintes sont du type « $\leq$ » et tous les coefficients des membres de droite

b_i sont strictement positifs. En effet, dans ce cas l'origine $(0, \ldots, 0)$ est un sommet de $\mathcal{D}$! Nous nous plaçons donc, pour toute la suite, dans le cadre d'un problème d'optimisation dont toutes les contraintes sont du type « $\leq$ ».

Remarque 1.13. Lorsque le problème présente des contraintes du type $\geq$ ou mixte, on peut utiliser une variante de l'algorithme du simplexe connue sous le nom de *méthode des deux phases*. La première phase correspond à la détermination d'un sommet de départ ; la seconde est essentiellement une application de la méthode du simplexe. Nous ne présenterons pas la méthode des deux phases dans cette sous-section qui ne se veut qu'introductive. Les éventuels problèmes liés à des sommets dégénérés ne seront pas non plus discutés ici.

Nous présentons ci-dessous l'algorithme du simplexe pour la résolution d'un problème d'optimisation à n variables et k contraintes, toutes du type « $\leq$ » et telles que les coefficients des membres de droite b_i soient strictement positifs. L'algorithme utilise une décomposition de l'ensemble des variables en deux sous ensembles : l'ensemble des *variables de base* dont les valeurs sont calculées et l'ensemble des *variables hors base* dont les valeurs sont prescrites et égales à 0. Pour passer d'un sommet à l'autre, l'algorithme fait entrer une variable et sortir une autre variable de la base à chaque itération de façon à obtenir la plus grande amélioration possible de l'objectif. Nous utilisons la présentation dite par tableaux. Nous distinguons les cas de la maximisation et de la minimisation.

Algorithme 1.4 (Algorithme du simplexe pour la maximisation sous des contraintes du type « $\leq$ » avec membre de droite positif.)**.**
Entrée : *Le problème d'optimisation linéaire :*

$$\text{(P)} \left\{ \begin{array}{ll} \textbf{maximiser} \quad z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n & \\ \textbf{s.l.c.} & \\ \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \\ \quad\quad x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \end{array} \right. , \qquad \textit{avec } b1, \ldots, b_k > 0.$$

Corps de l'algorithme :

1. *Écrire le problème standard associé à* (P) *:*

$$(\mathrm{P_S}) \left\{ \begin{array}{ll} \textbf{maximiser} \quad z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n & \\ \textbf{s.l.c.} & \\ \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + e_1 & = b_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n + e_k & = b_k \\ \quad\quad x_1, \ldots, x_n, e_1, \ldots, e_k & \geq 0 \end{array} \right. .$$

2. *Initialiser l'ensemble des variables hors base :* $\mathrm{HB} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
3. *Initialiser l'ensemble des variables de base (v.b.) :* $\mathrm{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$.
4. *Écrire le tableau initial* T *:*

v.b. \ v.	x_1	$\dots$	x_n	e_1	e_2	$\dots$	e_k	$-z$	b_i
e_1	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,n}$	*1*	*0*	$\dots$	*0*	*0*	b_1
e_2	$a_{2,1}$	$\dots$	$a_{2,n}$	*0*	*1*	$\dots$	*0*	*0*	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_k	$a_{k,1}$	$\dots$	$a_{k,n}$	*0*	*0*	$\dots$	*1*	*0*	b_k
$-z$	α_1	$\dots$	α_n	*0*	*0*	$\dots$	*0*	*1*	*0*

5. *Tant qu'au moins un des coefficients de la ligne de $-z$ (colonnes de $-z$ et b_i exceptées) est strictement positif répéter :*
   (a) *déterminer le plus grand coefficient de la ligne de $-z$ (colonnes de $-z$ et b_i exceptées) ;*
   (b) *noter j_0 le numéro de la colonne correspondante ;*
   (c) *noter* **e** *la variable correspondante (variable entrante) ;*
   (d) *dans chacune des lignes* 1 *à k calculer le quotient du coefficient de la colonne b_i sur celui de la colonne j_0 ;*
   (e) *déterminer le plus petit des quotients parmi les positifs et noter i_0 sa ligne ;*
   (f) *noter* **s** *la variable correspondante (variable sortante) ;*
   (g) *mettre à jour* HB *et* B *:* $\mathrm{HB} \leftarrow \mathrm{HB} \cup \{\mathbf{s}\} \setminus \{\mathbf{e}\}$ *et* $\mathrm{B} \leftarrow \mathrm{B} \cup \{\mathbf{e}\} \setminus \{\mathbf{s}\}$ *(penser à le faire dans le tableau) ;*
   (h) *remplacer L_{i_0} par $\frac{1}{a_{i_0,j_0}} L_{i_0}$;*
   (i) *pour tout $i \in \{1, \dots, k+1\} \setminus \{i_0\}$, remplacer L_i par $L_i - a_{i,j_0} L_{i_0}$.*

Sortie : *Valeurs du maximum z et des coordonnées du point où il est réalisé $x_1, \dots, x_n$ lues dans le dernier tableau.*

Remarque 1.14.

1. Afin de mieux comprendre le fonctionnement de cet algorithme, la lecture des deux exemples ci-dessous est vivement recommandée !
2. Dans les étapes 2. et 3., les choix des variables hors base (et de base) traduisent le fait que l'algorithme démarre du sommet de coordonnées $(x_1; \dots; x_n) = (0; \dots; 0)$.
3. Dans les tableaux comme celui écrit dans le point 4., chaque ligne représente une équation. Par exemple la première ligne représente l'équation $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + e_1 = b_1$. Cette ligne débute par e_1, ce qui indique que dans cette équation la seule variable non nulle est e_1 ; ceci permet de lire directement la valeur de e_1 dans l'intersection de cette ligne et de la colonne des b_i. Afin de toujours pourvoir faire une telle lecture directe, on fera en sorte de toujours avoir des 1 dans les intersections des lignes et colonnes correspondant aux variables de base ainsi qu'à $-z$. La dernière ligne du tableau T représente l'équation $z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ (soit $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + (-z) = 0$).
4. Les étapes 5a.-5c. permettent de déterminer la variable dont l'augmentation de la valeur produit la plus grande amélioration marginale ; cette variable est appelée *variable entrante.*

5. Les étapes 5d.-5f. permettent de déterminer dans quelle mesure on peut augmenter la valeur de la variable entrante pour continuer à respecter les contraintes et quelle variable il faut faire sortir de la base pour permettre cette augmentation.
6. S'il y a des ex-æquo lors de la détermination de la variable entrante ou sortante, on choisira par convention la première dans l'ordre lexicographique.
7. Les étapes 5h.-5i. reviennent à l'exécution d'une itération de l'algorithme de Gauss-Jordan. Elle permettent de ré-exprimer les variables de base et z en fonction des variables hors base.
8. Minimiser z revient à maximiser $-z$, il n'est donc pas indispensable de disposer d'un algorithme de minimisation. Nous l'écrivons pourtant ci-dessous.

Algorithme 1.5 (Algorithme du simplexe pour la minimisation sous des contraintes du type « $\leq$ » avec membre de droite positif.)**.**
Entrée : *Le problème d'optimisation linéaire :*

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{ll} \textbf{minimiser} & z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\ \textbf{s.l.c.} & \\ \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \quad a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \\ \qquad x_1, \dots, x_n & \geq 0 \end{array}\right. , \qquad \textit{avec } b1, \dots, b_k > 0.$$

Corps de l'algorithme :

1. Écrire le problème standard associé à (P) *:*

$$(\mathrm{P_S})\left\{\begin{array}{ll} \textbf{minimiser} & z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\ \textbf{s.l.c.} & \\ \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + e_1 & = b_1 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \quad a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n + e_k & = b_k \\ \qquad x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_k & \geq 0 \end{array}\right. .$$

2. Initialiser l'ensemble des variables hors base : $\mathrm{HB} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

3. Initialiser l'ensemble des variables de base (v.b.) : $\mathrm{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$.

4. Écrire le tableau initial T *:*

v.b. \ *v.*	x_1	...	x_n	e_1	e_2	...	e_k	$-z$	b_i
e_1	$a_{1,1}$	...	$a_{1,n}$	*1*	*0*	...	*0*	*0*	b_1
e_2	$a_{2,1}$	...	$a_{2,n}$	*0*	*1*	...	*0*	*0*	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
e_k	$a_{k,1}$	...	$a_{k,n}$	*0*	*0*	...	*1*	*0*	b_k
$-z$	α_1	...	α_n	*0*	*0*	...	*0*	*1*	*0*

5. Tant qu'au moins un des coefficients de la ligne de $-z$ (colonnes de $-z$ et b_i exceptées) est strictement négatif répéter :

(a) *déterminer le coefficient le plus grand en valeur absolue parmi les négatifs dans la ligne de* $-z$ *(colonnes de* $-z$ *et* b_i *exceptées) ;*

(b) *noter* j_0 *le numéro de la colonne correspondante ;*

(c) *noter* **e** *la variable correspondante (variable entrante) ;*

(d) *dans chacune des lignes 1 à* k *calculer le quotient du coefficient de la colonne* b_i *sur celui de la colonne* j_0 *;*

(e) *déterminer le plus petit des quotients parmi les positifs et noter* i_0 *sa ligne ;*

(f) *noter* **s** *la variable correspondante (variable sortante) ;*

(g) *mettre à jour* HB *et* B *:* $\mathrm{HB} \leftarrow \mathrm{HB} \cup \{\mathbf{s}\} \setminus \{\mathbf{e}\}$ *et* $\mathrm{B} \leftarrow \mathrm{B} \cup \{\mathbf{e}\} \setminus \{\mathbf{s}\}$ *(penser à le faire dans le tableau) ;*

(h) *remplacer* L_{i_0} *par* $\frac{1}{a_{i_0,j_0}} L_{i_0}$ *;*

(i) *pour tout* $i \in \{1, \dots, k+1\} \setminus \{i_0\}$*, remplacer* L_i *par* $L_i - a_{i,j_0} L_{i_0}$*.*

Sortie : *Valeurs du minimum* z *et des coordonnées du point où il est réalisé* $x_1, \dots, x_n$ *lues dans le dernier tableau.*

Exemple 1.9 (suite)**.** Terminons l'Exemple 1.9 en résolvant le problème (P) par la méthode du simplexe. Avant de réaliser l'exécution de la méthode du simplexe en utilisant la présentation par tableaux et afin d'en comprendre précisément le fonctionnement, on détaillera le cheminement suivi par l'algorithme sur cet exemple sans utiliser de tableau. Ceci permettra de mettre en avant l'effet concret de chaque étape de l'algorithme sur les variables et contraintes du problème. La Figure 1.3 représente le chemin suivi par l'algorithme pour explorer différents sommets de l'ensemble admissible du problème jusqu'à avoir trouvé le sommet où est réalisée la solution optimale.

Méthode du simplexe - présentation sans tableaux

Le problème à résoudre est :

$$
(\mathrm{P}) \left\{
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiser} & z = 15x_1 + 17x_2 \\
\textbf{s.l.c.} & \\
x_1 + 3x_2 & \leq 300 \\
4x_1 + 2x_2 & \leq 500 \\
x_1 + x_2 & \leq 150 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
\right. .
$$

On n'est pas habitué à résoudre des systèmes d'inéquations ; on se ramène à un système d'équations en écrivant le problème standard associé :

$$
(\mathrm{P_S}) \left\{
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiser} & z = 15x_1 + 17x_2 \\
\textbf{s.l.c.} & \\
x_1 + 3x_2 + e_1 & = 300 \\
4x_1 + 2x_2 + e_2 & = 500 \\
x_1 + x_2 + e_3 & = 150 \\
x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 & \geq 0
\end{array}
\right. .
$$

On peut réécrire ceci sous la forme :

$$\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}$$
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + e_1 = 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 500 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 150 \\ z = 15x_1 + 17x_2 \end{array}\right. . \tag{1.4.1}$$

Dans le système précédant nous avons 6 variables x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 et z mais seulement 4 équations. Le système est sous-déterminé et admet une infinité de solutions. Pour déterminer une solution particulière du système, on n'a pas d'autre choix que de fixer les valeurs de $6 - 4 = 2$ des variables et d'exprimer les autres en fonction de ces variables. En fait, on fixe à 0 les valeurs des variables hors base. On commence par choisir pour variables hors base initiales x_1 et x_2. Ce choix correspond au fait que l'algorithme démarre à l'origine. Ce point est un sommet de l'ensemble admissible dès lors que toutes les contraintes sont du type « $\leq$ » avec des membres de droite strictement positifs.

Le système (1.4.1) permet d'exprimer e_1, e_2, e_3 et z en fonction de x_1 et x_2 comme suit :

$$\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}$$
$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = 300 - x_1 - 3x_2 \\ e_2 = 500 - 4x_1 - 2x_2 \\ e_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ z = 15x_1 + 17x_2 \end{array}\right. . \tag{1.4.2}$$

Puisque l'on a choisi de fixer $x_1 = x_2 = 0$, on obtient $e_1 = 300$, $e_2 = 500$, $e_3 = 150$ et $z = 0$. Notre but est de maximiser z. La dernière ligne du système précédant nous indique que si l'on augmente x_1 de 1, la valeur de z augmentera de 15 et si l'on augmente x_2 de 1, la valeur de z augmentera de 17. On a clairement intérêt à augmenter la valeur de x_2 plutôt que celle de x_1 pour augmenter le plus possible la valeur de z.

Il faut maintenant voir dans quelle mesure on peut augmenter x_2 en faisant sortir une des variables e_1, e_2 ou e_3 de la base pour continuer à respecter les contraintes. La première ligne nous indique que si l'on fait sortir e_1 de la base, on peut augmenter x_2 jusqu'à $x_2 = \frac{1}{3}(300 - x_1 - e_1) = 100$ avec $e_1 = x_1 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_2 de façon plus importante, il faudrait prendre e_1 négatif ce qui n'est pas possible. La deuxième ligne nous indique que si l'on fait sortir e_2 de la base, on peut augmenter x_2 jusqu'à $x_2 = \frac{1}{2}(500 - 4x_1 - e_2) = 250$ avec $e_2 = x_1 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_2 de façon plus importante, il faudrait prendre e_2 négatif ce qui n'est pas possible. La troisième ligne nous indique que si l'on fait sortir e_3 de la base, on peut augmenter x_2 jusqu'à $x_2 = 150 - x_1 - e_3 = 150$ avec $e_3 = x_1 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_2 de façon plus importante, il faudrait prendre e_3 négatif ce qui n'est pas possible. Ainsi, le meilleur choix possible est de faire sortir e_1 de la base, ce qui conduira à $x_2 = 100$. Le choix d'une valeur supérieure à 100 pour x_2 et le respect des trois premières égalités du système contredirait au moins la positivité de e_1. Les nouvelles variables hors base étant x_1 et e_1, on exprime les variables de base x_2, e_2, e_3 ainsi que z en fonction de x_1 et e_1 en partant de (1.4.2)

$$\begin{array}{l}\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}\\ \left\{\begin{array}{l} e_1 = 300 - x_1 - 3x_2 \\ e_2 = 500 - 4x_1 - 2x_2 \\ e_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ z = 15x_1 + 17x_2 \end{array}\right.\end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l}\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}\\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1 \\ e_2 = 300 - \frac{10}{3}x_1 + \frac{2}{3}e_1 \\ e_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 \\ z = 1700 + \frac{28}{3}x_1 - \frac{17}{3}e_1 \end{array}\right.\end{array}. \tag{1.4.3}$$

Puisque x_1 et e_1 sont hors base, $x_1 = e_1 = 0$ et on obtient que $x_2 = 100$, $e_2 = 300$, $e_3 = 50$ et $z = 1700$. On souhaite encore augmenter la valeur de z si c'est possible. La dernière ligne du système précédant nous indique que si on augmente x_1 de 1, la valeur de z augmentera de $\frac{28}{3}$ et si on augmente e_1 de 1, la valeur de z diminuera de $\frac{17}{3}$. Ainsi, seule l'augmentation de la valeur de x_1 permet d'améliorer la valeur de z. On choisit de faire entrer x_1 dans la base.

Il faut maintenant voir dans quelle mesure on peut augmenter x_1 en faisant sortir une des variables x_2, e_2 ou e_3 de la base pour continuer à respecter les contraintes. La première ligne nous indique que si l'on fait sortir x_2 de la base, on peut augmenter x_1 jusqu'à $x_1 = 3(100 - x_2 - \frac{1}{3}e_1) = 300$ avec $e_1 = x_2 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_1 de façon plus importante, il faudrait prendre x_2 négatif ce qui n'est pas possible. La deuxième ligne nous indique que si l'on fait sortir e_2 de la base, on peut augmenter x_1 jusqu'à $x_1 = \frac{3}{10}(300 + \frac{2}{3}x_2 - e_2) = 90$ avec $e_1 = e_2 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_1 de façon plus importante, il faudrait prendre e_2 négatif ce qui n'est pas possible. La troisième ligne nous indique que si l'on fait sortir e_3 de la base, on peut augmenter x_1 jusqu'à $x_1 = \frac{3}{2}(50 + \frac{1}{3}e_1 - e_3) = 75$ avec $e_1 = e_3 = 0$ puisque ces variables seraient hors base. Si l'on augmentait x_1 de façon plus importante, il faudrait prendre e_3 négatif ce qui n'est pas possible. Ainsi, le meilleur choix possible est de faire sortir e_3 de la base, ce qui conduira à $x_1 = 75$. Le choix d'une valeur supérieure à 75 pour x_1 et le respect des trois premières égalités du système contredirait à la positivité de e_3. Les nouvelles variables hors base étant e_1 et e_3, on exprime les variables de base x_1, e_2, x_2 ainsi que z en fonction de e_1 et e_3 en partant de (1.4.3) :

$$\begin{array}{l}\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}\\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1 \\ e_2 = 300 - \frac{10}{3}x_1 + \frac{2}{3}e_1 \\ e_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 \\ z = 1700 + \frac{28}{3}x_1 - \frac{17}{3}e_1 \end{array}\right.\end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l}\text{maximiser } z \text{ avec } x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \text{ vérifiant}\\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = 75 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 \\ e_2 = 50 - e_1 + 5e_3 \\ x_1 = 75 + \frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_3 \\ z = 2400 - e_1 - 14e_3 \end{array}\right.\end{array} \tag{1.4.4}$$

Puisque e_1 et e_3 sont hors base, $e_1 = e_3 = 0$ et donc $x_1 = x_2 = 75$, $e_2 = 50$ et $z = 2400$. Dans la dernière ligne, on voit que le fait d'augmenter e_1 de 1 conduit à une perte de 1 pour z

et le fait d'augmenter e_3 de 1 conduit à une perte de 3 sur z. Il n'y a donc plus de moyen pour augmenter la valeur de z. On s'arrête et on conclue que la solution optimale est $z^* = 2400$ atteinte en $(x_1^*; x_2^*) = (75; 75)$.

Méthode du simplexe - présentation par tableaux

Nous avons déjà écrit le problème sous forme standard ; le tableau initial est le suivant et les variables de base sont e_1, e_2 et e_3.

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
e_1	1	3	1	0	0	0	300
e_2	4	2	0	1	0	0	500
e_3	1	1	0	0	1	0	150
$-z$	15	17	0	0	0	1	0

La première ligne représente l'équation :

$$1 \times x_1 + 3 \times x_2 + 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 + 0 \times (-z) = 300,$$

soit

$$x_1 + 3x_2 + e_1 = 300.$$

De même, les deuxième et troisième lignes représentent respectivement les équations :

$$4x_1 + 2x_2 + e_2 = 500 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + e_3 = 150.$$

La quatrième ligne représente l'équation :

$$15x_1 + 17x_2 - z = 0$$

c'est-à-dire l'objectif à maximiser : $z = 15x_1 + 17x_2$.

Ce tableaux correspond à (1.4.2). Puisque $x_1 = x_2 = 0$, on a $e_1 = 300$, $e_2 = 500$, $e_3 = 150$ et $z = 0$, ce qui se lit directement dans le tableau. Les variables de base sont e_1, e_2 et e_3, les contraintes saturées sont $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et l'algorithme démarre du sommet $S_0 = (0; 0)$.

Le coefficient le plus grand parmi les positifs dans la ligne de $-z$ (colonne de $-z$ exceptée) est 17 et correspond à la variable x_2, on décide donc de faire rentrer x_2 dans la base.

Il faut maintenant faire sortir une variable de la base pour y laisser une place à x_2. Pour cela, on calcule, dans chaque ligne correspondant à une variable de base, le quotient du coefficient de la colonne des b_i sur le coefficient de la colonne de la variable entrante x_2.

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i	quotients
e_1	1	3	1	0	0	0	300	$\frac{300}{3} = 100$
e_2	4	2	0	1	0	0	500	$\frac{500}{2} = 250$
e_3	1	1	0	0	1	0	150	$\frac{150}{1} = 150$
$-z$	15	$\underline{17}$	0	0	0	1	0	

Le quotient le plus petit (parmi les positifs) est 100 et correspond à la variable e_1 que l'on fait sortir de la base et que l'on remplace par x_2.

On repère, ensuite, le pivot situé dans la ligne de la variable sortante et la colonne de la variable entrante et on effectue une itération de la méthode de Gauss-Jordan pour mettre à 1 la valeur du pivot et à 0 les autres coefficients de la colonne de la variable entrante. En partant du tableau :

	v.b. / v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
$\rightarrow$	$\cancel{e_1}\, x_2$	1	3	1	0	0	0	300
	e_2	4	2	0	1	0	0	500
	e_3	1	1	0	0	1	0	150
	$-z$	15	17	0	0	0	1	0
			$\uparrow$					

on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1/3$ pour obtenir :

v.b. / v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100
e_2	4	2	0	1	0	0	500
e_3	1	1	0	0	1	0	150
$-z$	15	17	0	0	0	1	0

puis les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 17L_1$, pour obtenir :

v.b. / v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100
e_2	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	300
e_3	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	50
$-z$	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	1	-1700

On peut lire dans ce tableau (correspondant à (1.4.3)) que lorsque $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $e_1 = 0$ $e_2 = 300$ et $e_3 = 50$, la valeur de la fonction objectif z est 1700 ($-z = -1700$).

Dans le tableau :

v.b. / v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100
e_2	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	300
e_3	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	50
$-z$	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	1	-1700

nous pouvons voir qu'il reste un coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$. Celui-ci est $\frac{28}{3}$ et correspond à la variable x_1 que l'on va faire entrer dans la base.

Pour déterminer la variable sortante, on calcule, dans chaque ligne correspondant à une variable de base, le quotient du coefficient de la colonne des b_i sur le coefficient de la colonne de la variable entrante x_1.

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i	quotients
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100	$\frac{100}{\frac{1}{3}} = 300$
e_2	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	300	$\frac{300}{\frac{10}{3}} = 90$
e_3	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	50	$\frac{50}{\frac{2}{3}} = 75$
$-z$	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	1	-1700	

Le quotient le plus faible (parmi les positifs) est 75 et correspond à la variable e_3 que l'on fait sortir de la base et que l'on remplace par x_1.

On repère, ensuite, le pivot situé dans la ligne de la variable sortante et la colonne de la variable entrante et on effectue une itération de la méthode de Gauss-Jordan pour mettre à 1 la valeur du pivot et à 0 les autres coefficients de la colonne de la variable entrante. En partant du tableau :

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100
e_2	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	300
$\cancel{e_3}\, x_1$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	50
$-z$	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	1	-1700

on effectue l'opération $L_3 \leftarrow \frac{3}{2}L_3$, pour obtenir :

v. / v.b.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	100
e_2	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	300
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	75
$-z$	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	1	-1700

puis les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{10}{3}L_3$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{28}{3}L_3$, pour obtenir :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	75
e_2	0	0	1	1	-5	0	50
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	75
$-z$	0	0	-1	0	-14	1	-2400

L'effet de cette étape est exprimer x_2, e_2, x_1 et $-z$ en fonction des variables hors base e_1 et e_3 (ceci correspond à 1.4.4).

Dans le dernier tableau, la ligne de $-z$ (colonne de $-z$ exceptée) ne comporte pas de coefficient strictement positif. L'algorithme s'arrête et on peut lire dans le tableau que la valeur optimale est $z = 2400$ ($-z = -2400$) atteinte lorsque $x_1 = x_2 = 75$ ($e_1 = e_3 = 0$ et $e_2 = 50$). On retrouve le résultat obtenu plus haut par la méthode graphique.

Exemple 1.10. Résolvons par la méthode du simplexe le problème :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \textbf{minimiser} \quad z = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \textbf{s.l.c.} \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 50 \\ \quad x_1 - 4x_3 \leq 20 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Le problème standard associé à (P) :

$$(\mathrm{P_S}) \begin{cases} \textbf{minimiser} \quad z = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \textbf{s.l.c.} \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + e_1 = 100 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 + e_2 = 50 \\ \quad x_1 - 4x_3 + e_3 = 20 \\ \quad x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}.$$

L'algorithme du simplexe démarre ici avec pour variables de base e_1, e_2 et e_3 et le tableau :

v.b. \ v.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
e_1	1	1	2	1	0	0	0	100
e_2	3	-2	0	0	1	0	0	50
e_3	1	0	-4	0	0	1	0	20
$-z$	2	$\underline{-3}$	-1	0	0	0	1	0

Il s'agit d'un problème de **minimisation** et le coefficient le **plus grand en valeur absolue parmi les négatifs** dans la ligne de $-z$ (colonne de $-z$ exceptée) est -3 et correspond à la variable x_2 que l'on va faire rentrer dans la base. Pour déterminer la variable sortante, on calcule les quotients des coefficients de la colonne des b_i sur ceux de la colonne de la variable entrante x_2.

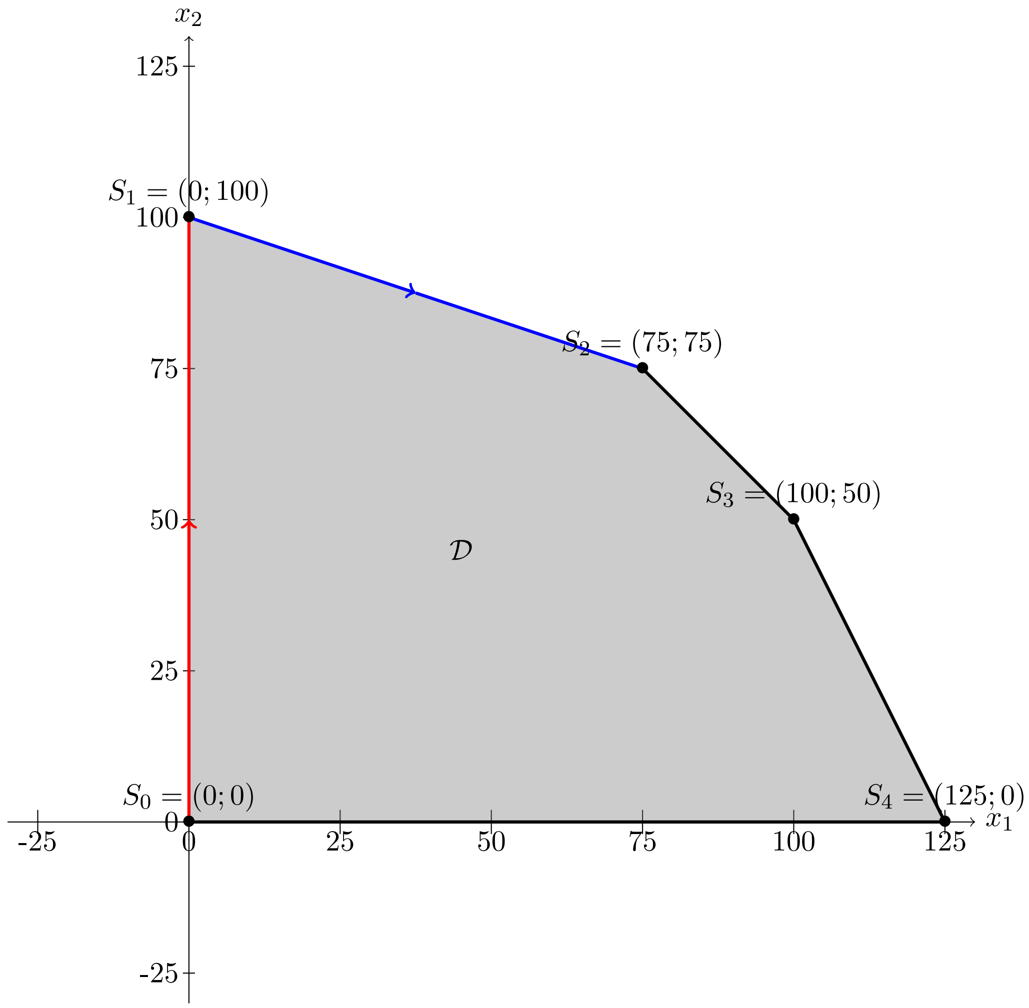

FIGURE 1.3 – Pour résoudre le problème d'optimisation linéaire de l'Exemple 1.9, l'algorithme du simplexe démarre du sommet S_0. Lors de la première itération (rouge), il décide d'explorer le sommet S_1 puis, lors de la deuxième itération (bleu), le sommet S_2. L'algorithme s'arrête ensuite puisqu'il est arrivé sur le sommet réalisant réalisant le maximum de la fonction objectif sur le domaine $\mathcal{D}$. Les sommets S_2, S_3 et S_4 ne sont pas visités par l'algorithme.

v.b. \ v.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i	quotients
$\cancel{e_1}\, x_2$	1	1	2	1	0	0	0	100	$\frac{100}{1} = 100$
e_2	3	-2	0	0	1	0	0	50	$\frac{50}{-2} = -25$
e_3	1	0	-4	0	0	1	0	20	∞
$-z$	2	-3	-1	0	0	0	1	0	

Le quotient le plus petit parmi les positifs est 100 et correspond à la variable e_1 que l'on fait sortir de la base et que l'on remplace par x_2. Le pivot est 2 les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et

$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$ conduisent à :

v.b. \ v.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	$-z$	b_i
x_2	1	1	2	1	0	0	0	100
e_2	5	0	4	2	1	0	0	250
e_3	1	0	-4	0	0	1	0	20
$-z$	5	0	5	3	0	0	1	300

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-z$ (colonne de $-z$ exceptée). Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, l'algorithme s'arrête. La solution optimale est donc $z^* = -300$ et est atteinte en $(x_1^*; x_2^*; x_3^*) = (0; 100; 0)$.

1.5 Complément : la notion de déterminant

Définition 1.15. *Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ une matrice carrée de taille 2.*
On appelle déterminant *de la matrice A la quantité :*

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}. \tag{1.5.1}$$

Définition[-Théorème] 1.16. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ une matrice carrée de taille n.*
On appelle déterminant *de la matrice A la quantité :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j} \det(A_{i,j}), \tag{1.5.2}$$

où la matrice $A_{i,j}$ est obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} et la j^{e} colonne. Cette quantité ne dépend pas de j.

Remarque 1.15.

1. La définition précédente est récursive. Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille $n \geq 3$, on le développe le long de colonnes à l'aide de la formule (1.5.2) pour se ramener à une combinaison linéaire de déterminant 2×2 que l'on calcule avec la formule (1.5.1).
2. On peut également développer un déterminant le long des lignes avec la formule :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j} \det(A_{i,j}), \tag{1.5.3}$$

   où la matrice $A_{i,j}$ est obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} et la j^{e} colonne.

Exemple 1.11. On a :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = 2 \times 7 - 5 \times (-3) = 29.$$

En développant le long de la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix} &= 1\times\det\begin{pmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{pmatrix} - 2\times\det\begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 9\end{pmatrix} + 3\times\det\begin{pmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{pmatrix}\\
&= 1\times(5\times 9-8\times 6) - 2\times(4\times 9-7\times 6) + 3\times(4\times 8-7\times 5)\\
&= -3+12-9 = 0.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 3$, on peut profiter de l'éventuelle présence de 0 sur une ligne ou une colonne pour économiser des calculs lors du développement du déterminant. Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 13 & 12 & 11 & 10\end{pmatrix}.$$

On a tout intérêt à commencer par développer le long de la 4$^{\text{e}}$ colonne puisque les 3 premiers termes du développement disparaitront du fait des 0. On a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 13 & 12 & 11 & 10\end{pmatrix}\\
&= -0\times\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 13 & 12 & 11\end{pmatrix} + 0\times\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 13 & 12 & 11\end{pmatrix}\\
&\qquad - 0\times\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 13 & 12 & 11\end{pmatrix} + 10\times\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= 10\times\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On profite ensuite des 0 de la 2$^{\text{e}}$ colonne pour obtenir que :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 10\times\det\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= 10\times\left(-3\times\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} + 0\times\det\begin{pmatrix}\star & \star\\ \star & \star\end{pmatrix} - 0\times\det\begin{pmatrix}\star & \star\\ \star & \star\end{pmatrix}\right)\\
&= -30\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -30\times(0\times 1-2\times 2) = 120.
\end{aligned}$$

Comme le suggèrent les exemples précédents, le calcul d'un déterminant peut être long et couteux en calculs. La proposition suivante contient des règles de simplification permettant de calculer un déterminant plus efficacement.

Proposition 1.8.
1. *L'échange de deux lignes ou deux colonnes, change le signe du déterminant.*
2. *Si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.*
3. *Si on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un réel α, le déterminant est multiplié par α.*
4. *Si l'on ajoute à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une* **autre** *colonne (ou d'une* **autre** *ligne), la valeur du déterminant ne change pas. En particulier, si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul.*
5. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux. En particulier,* $\det(I) = 1$.
6. *Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, on a :*
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
En particulier, si A est inversible $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

La règle de calcul 4. se révèle extrêmement efficace dans la pratique comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.12. Considérons la matrice :
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 13 & 12 & 11 & 21 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant la 3$^{\text{e}}$ colonne à la 4$^{\text{e}}$ on obtient que :
$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 13 & 12 & 11 & 21 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi fait apparaitre trois 0 dans la dernière colonne qui vont largement simplifier les calculs. En reconnaissant, dans le membre de droite de la dernière identité, le déterminant de la matrice A de l'Exemple 1.11, on obtient que $\det(B) = 120$.

La notion de déterminant permet d'énoncer un critère simple pour l'inversibilité des matrices.

Théorème 1.2 (Admis)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. *A est inversible,*
2. $\det(A) \neq 0$.

Il est possible d'exprimer l'inverse d'une matrice en fonction de son déterminant. Toutefois cette expression conduit à de trop lourds calculs lorsque la matrice est de taille plus grande que 3×3 (le coût algorithmique étant de l'ordre de $n!$). On aura, dans ces cas de figure, recours aux liens entre l'inversion de matrices et les systèmes linéaires ainsi qu'aux méthodes de résolution de systèmes présentées dans la section suivante (celles-ci ont un coût algorithmique de l'ordre de n^2).

Proposition 1.9. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ *telle que* $\det(A) \neq 0$.
Alors, l'inverse de A *est :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Preuve : Exercice. □

1.6 Complément : preuves

Preuve de la Proposition 1.1 :

1.

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= (a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} + (c_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \\ &= (a_{i,j}+b_{i,j}+c_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \\ &= (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} + (b_{i,j}+c_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = A+(B+C).\end{aligned}$$

2.
$$A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = (b_{i,j}+a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = B+A.$$

3.
$$A+\mathbf{0}_{m,n} = (a_{i,j}+0)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = A$$

et

$$\mathbf{0}_{m,n}+A = (0+a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = A.$$

□

Preuve de la Proposition 1.2 :

1.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)A &= ((\alpha+\beta)a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = (\alpha a_{i,j}+\beta a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \\ &= (\alpha a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} + (\beta a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \alpha A+\beta A.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha\,(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = (\alpha(a_{i,j}+b_{i,j}))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \\ &= (\alpha a_{i,j}+\alpha b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \\ &= (\alpha a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} + (\alpha b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \alpha A+\alpha B.\end{aligned}$$

□

Preuve de la Prposition 1.3 :

1. Un contre exemple a déjà été donné dans l'Exemple 1.4.
2. C'est un calcul immédiat.

3. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $C = (c_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$.

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq p} (c_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,l}\right)c_{l,j}\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq q} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{k,l}c_{l,j}\right)\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq q} \\
&= (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{i,l}c_{l,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq q} \\
&= A(BC).
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

Statistiques descriptives univariées

La *statistique descriptive* regroupe un panel de méthodes permettant de représenter et synthétiser des données collectées. Ces données sont obtenues soit sur une population entière soit sur un échantillon choisi au hasard dans cette population. Une fois les données collectées, le but est de fournir une visualisation ou une description simple d'un phénomène à l'aide d'un nombre limité de valeurs. On a pour cela recours à des représentations graphiques et à des caractéristiques de la série de données appelées *paramètres statistiques.*

S'il est nécessaire de préciser statistiques *descriptives*, c'est qu'il existe d'autres méthodes statistiques dont les objectifs sont différents. Celles-ci sont regroupées sous la terminologie *statistiques inférentielles* et ont pour objet l'aide à la décision concernant des caractéristiques de (très) grandes populations en ne se basant que sur des observations obtenues sur un échantillon, généralement petit, de la population.

Les statistiques inférentielles s'appuient de manière intensive sur la théorie des probabilités, ce qui les rend délicates à appréhender. Au contraire, les statistiques descriptives (*a fortiori* dans le cas d'une seule dimension) ne demandent pas de prérequis particulier et sont l'objet de ce chapitre.

2.1 Vocabulaire statistique

Définition 2.1. *On appelle :*

1. population *tout ensemble étudié par la statistique ;*

2. individu *tout élément de la population ;*

3. effectif total *le nombre d'individus dans la population.*

Notations 2.1. *On note $\mathcal{P}$ la population et N l'effectif total de cette population.*

Exemple 2.1.

1. Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des étudiants de la promotion, un individu est un étudiant de la promotion.
2. Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des jours de septembre 2016, chaque jour de ce mois est un individu et l'effectif total est $N = 30$.

Définition 2.2. *Soit $\mathcal{P}$ une population.*

On appelle variable statistique *(ou* caractère*) une quantité ou qualité définie sur $\mathcal{P}$ susceptible de varier d'un individu à l'autre. On appelle* modalités *les différentes valeurs ou aspects pris par cette variable.*

On distingue :

1. *les variables* qualitatives *pour lesquelles les modalités ne sont pas objectivement comparables ;*
2. *les variables* quantitatives *(ou* ordinales*) dont les modalités sont mesurables et comparables deux à deux.*

Parmi les variables quantitatives, on distingue :

1. *les variables quantitatives* discrètes *dont les valeurs possibles sont isolées ;*
2. *les variables quantitatives* continues *pouvant prendre toutes les valeurs contenues dans un intervalle.*

Notation 2.2. *Les variables statistiques sont désignées par des lettres majuscules, généralement X ou Y.*

Exemple 2.1 (suite)**.**

1. Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des étudiants de la promotion, une variable statistique peut être la couleur des yeux (variable qualitative) ou son âge (variable quantitative discrète).
2. Si la population $\mathcal{P}$ est l'ensemble des jours de septembre 2016, une variable statistique peut être la hauteur totale des précipitations journalières relevées à Dijon (variable quantitative continue).

Dans les trois sections suivantes, on présente les outils et méthodes nécessaires à la réalisation d'une étude statistique (descriptive) en distinguant les cas :
— qualitatif,
— quantitatif discret sans regroupement en classe,
— quantitatif continu ou discret avec regroupement en classes.

2.2 Cas qualitatif

Après le dépouillement d'une étude, on synthétise généralement les résultats sous la forme d'un tableau faisant apparaître les modalités $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et les effectifs de ces modalités $n_1, n_1, \ldots, n_r$.

Modalités	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_r
Effectifs	n_1	n_2	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_r

Ici, r est le nombre de modalités (valeurs) prises par la variable statistique étudiée X, n_i représentent le nombre d'individus (effectif) pour lesquels la variable statistique prend la modalité x_i. L'effectif total est :

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r,$$

ce qui se réécrit de façon compacte sous la forme :

$$N = \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Remarque 2.1. La notation $\sum_{i=1}^{r} n_i$ ci-dessus, que l'on lit « somme des n_i pour i allant de 1 à n », présente deux avantages principaux dans notre contexte. Elle est compacte (courte à écrire) et induit une façon simple et efficace de saisir un calcul sous Excel en utilisant la fonction `SOMME(...)` et en sélectionnant la plage de données à sommer.

Définition 2.3. *Soit X une variable statistique de modalités $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ayant pour effectifs $n_1, n_1, \ldots, n_r$ dans une population $\mathcal{P}$ d'effectif total N. La* fréquence f_i *de la modalité x_i est définie par :*

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Remarque 2.2.

1. On a :
$$\sum_{i=1}^{r} f_i = f_1 + \cdots + f_r = 1 (= 100\%).$$
2. L'utilisation des fréquences présente l'avantage de pouvoir comparer facilement les résultats d'études portant sur le même caractère dans deux populations de tailles différentes.
3. Sous Excel, le symbole $ permet de « bloquer » une ligne (devant la lettre) ou une colonne (devant le nombre). Ainsi, il est particulièrement utile pour étendre une formule comme celle du calcul des fréquences : on laisse libre les lettre et nombre repérant n_i mais on bloque ceux repérant N avant d'étendre la formule que l'on n'aura pas besoin de réécrire d'une ligne à l'autre (voir aussi fichier « Aide mémoire Excel »).

Les représentations graphiques portent généralement sur les fréquences et rarement sur les effectifs. Dans le cas de variables qualitatives, on représente ces fréquences sous forme de :
- *diagramme en bâtons* : la hauteur du bâton associé à une modalité est simplement sa fréquence ;
- *diagramme circulaire* : l'angle du secteur associé à la modalité x_i est $\theta_i = f_i \times 360°$.

Exemple 2.2. Une étude a porté sur l'ensemble des 150 étudiants d'une promotion. Chacun devait répondre à la question « *Reprenez-vous le contenu de vos cours le soir ?* » par « *Jamais* », « *Rarement* », « *Souvent* » ou « *Toujours* ». Les résultats ont été les suivants :

Modalités (réponses) x_i	Jamais	Rarement	Souvent	Toujours
Effectifs n_i	9	60	66	15

L'effectif total est, comme annoncé, $N = 9+60+66+15 = 150$. On peut dresser le tableau suivant contenant les fréquences de chaque modalité.

Modalités (réponses) x_i	Jamais	Rarement	Souvent	Toujours	Total
Effectifs n_i	9	60	66	15	150
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$	0,06	0,4	0,44	0,1	1
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$(en %)	6	40	44	10	100

Les Figures 2.1 et 2.2 fournissent des représentations graphiques de ces données.

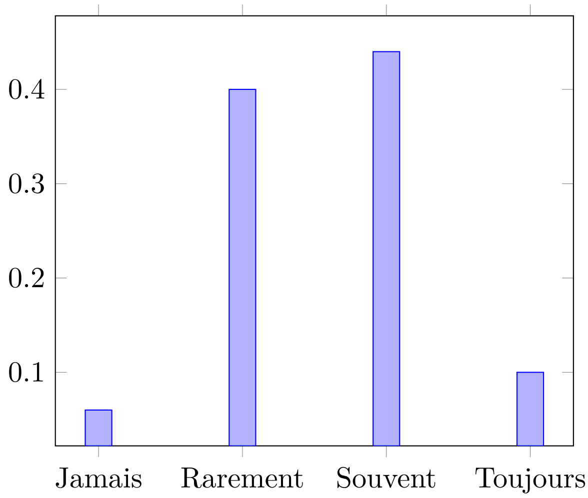

FIGURE 2.1 – Représentation des fréquences par un diagramme en bâtons (Exemple 2.2).

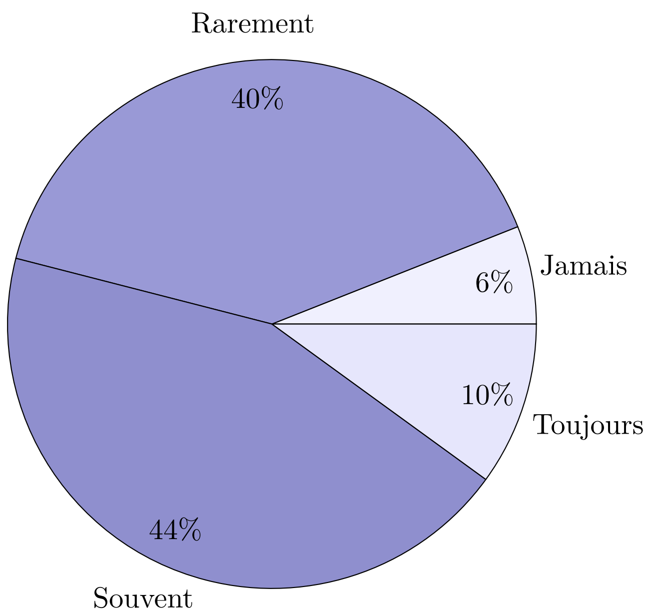

FIGURE 2.2 – Représentation des fréquences par un diagramme circulaire (Exemple 2.2).

2.3 Cas quantitatif discret sans regroupement en classes

Dans le cas où les modalités d'une variable statistique sont des valeurs numériques isolées (discrètes) et ne sont pas trop nombreuses, on peut effectuer un traitement statistique des données sans regroupement en classes. Dans toute cette section, on suppose que l'on étudie une variable statistique quantitative discrète X sur une population $\mathcal{P}$ d'effectif total N. On suppose également que les modalités $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont ordonnées par ordre croissant ($x_1 < x_2 < \cdots < x_r$) et que $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sont les effectifs associés à ces modalités.

2.3.1 Tableau statistique

Outre les modalités, effectifs et fréquences (définies dans la Définition 2.3), le tableau statistique d'une telle série contient les *effectifs cumulés croissants* et les *fréquences cumulées croissantes.*

Définition 2.4. *Le* i^e effectif cumulé croissant *est* $N_i = n_1 + \cdots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$ *et la* i^e fréquence cumulée croissante *est* $F_i = f_1 + \cdots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$*.*

Remarque 2.3.

1. Les quantités N_i et F_i représentent l'effectif (resp. la fréquence) des individus de la population pour lesquels la variable statistique prend une valeur inférieure ou égale à la modalité x_i.
2. On a :
$$N_r = N, \quad F_r = 1 = 100\% \quad \text{et} \quad F_i = \frac{n_1 + \cdots + n_i}{N} = \frac{N_i}{N}.$$

Notation 2.3. *On note* $\mathbf{P}[X < t]$ *la fréquence totale des modalités* x_i *telles que* $x_i < t$*. On peut définir de manière analogue* $\mathbf{P}[X \leq t]$*,* $\mathbf{P}[X > t]$*,* $\mathbf{P}[X \geq t]$*,* $\mathbf{P}[t_1 < X < t_2]$*, ...*

Définition 2.5. *On appelle* fonction de répartition *de la variable* X *la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $[0, 1]$ *:*
$$F : t \longmapsto F(t) = \mathbf{P}[X \leq t].$$

Proposition 2.1. *Soit* X *une variable statistique discrète dont les modalités sont* $x_1, \ldots, x_r$*.*

1. *La fonction de répartition* F *de* X *est croissante.*
2. *On a :*
$$F(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < x_1 \\ F_i & si\ x_i \leq t < x_{i+1},\ i = 1, \ldots, r-1 \\ 1 & si\ t \geq x_r \end{cases}.$$
En particulier la fonction de répartition d'une variable discrète est une fonction en escalier.
3. *On a :*
$$\mathbf{P}[X > t] = 1 - \mathbf{P}[X \leq t] = 1 - F(t),$$
$$\mathbf{P}[t_1 < X \leq t_2] = \mathbf{P}[X \leq t_2] - \mathbf{P}[X \leq t_1] = F(t_2) - F(t_1),$$
$$\mathbf{P}[X = x_i] = f_i \quad et \quad \mathbf{P}[X = t] = 0\ si\ t \notin \{x_1, \ldots, x_r\},$$
$$\mathbf{P}[X < t] = \mathbf{P}[X \leq t] - \mathbf{P}[X = t] = \begin{cases} F(x_i) - f(x_i) = F(x_{i-1}) & si\ t = x_i \\ F(t) & si\ t \notin \{x_1, \ldots, x_r\} \end{cases}.$$

Exemple 2.3. Une enquête réalisée auprès d'une population de 100 femmes de 40 ans a recensé le nombre d'enfant de chacune. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Nombre d'enfant(s) x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de femmes n_i	9	28	32	24	4	2	1

La population $\mathcal{P}$ est le contingent de femmes interrogées. L'effectif total est $N = 100$. La variable statistique étudiée X est le nombre d'enfant par femme ; il s'agit d'une variable quantitative discrète. Les modalités sont $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_7 = 6$ et ont pour effectifs respectifs $n_1 = 9, n_2 = 28, \ldots, n_7 = 1$. Le tableau statistique complet de cette série prend la forme suivante.

Modalités x_i	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs n_i	9	28	32	24	4	2	1
Fréquences $f_i = \frac{n_i}{N}$	0,09	0,28	0,32	0,24	0,04	0,02	0,01
Effectifs cumulés croissants $N_i = n_1 + \cdots + n_i$	9	37	69	93	97	99	100
Fréquences cumulées croissantes $F_i = \frac{N_i}{N}$	0,09	0,37	0,69	0,93	0,97	0,99	1

On peut, par exemple, s'intéresser à la proportion de femmes ayant au plus 2 enfants. Celle-ci est :

$$\mathbf{P}[X \leq 2] = F(2) = F_3 = 0,69 = 69\%.$$

La proportion de femmes ayant (strictement) plus de 3 enfants est quant à elle :

$$\mathbf{P}[X > 3] = 1 - \mathbf{P}[X \leq 3] = 1 - F(3) = 1 - F_4 = 1 - 0,93 = 0,07 = 7\%,$$

alors que la proportion de femmes ayant entre 1 et 3 enfants est :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[1 \leq X \leq 3] &= \mathbf{P}[X \leq 3] - \mathbf{P}[X < 1] = F(3) - \mathbf{P}[X \leq 0] \\ &= F(3) - F(0) = F_4 - F_1 = 0,93 - 0,09 = 0,84 = 84\%.\end{aligned}$$

2.3.2 Représentations graphiques

Histogramme des fréquences

Comme dans le cas qualitatif, l'histogramme des fréquences prend la forme d'un diagramme en bâtons (la hauteur du bâton associé à une modalité est simplement sa fréquence). On peut commenter à l'aide de cet histogramme la symétrie ou dissymétrie (traine étalée vers la droite ou la gauche) de la distribution.

La Figure 2.3 représente l'histogramme des fréquences obtenu dans l'Exemple 2.3. On observe dans ce cas une *traine* (ou *queue de distribution*) étalée vers la droite.

Fonction de répartition

Comme il a été annoncé dans la section précédente, la fonction de répartition F d'une variable discrète est une fonction en escalier. Cette fonction est nulle pour des valeurs de la variable t inférieures à la plus petite modalité x_1, vaut F_i sur tout intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}[$, $i \in \{1, \ldots r-1\}$ et vaut 1 sur l'intervalle $[x_r, +\infty[$.

La Figure 2.4 représente la fonction de répartition obtenue dans l'Exemple 2.3.

2.3.3 Paramètres statistiques

Dans toute cette section, on considère une série statistique quantitative discrète dont les modalités sont $x_1, x_2, \ldots, x_r$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_r$. On note N l'effectif total de la population. On illustrera les notions introduites à l'aide de l'Exemple 2.3.

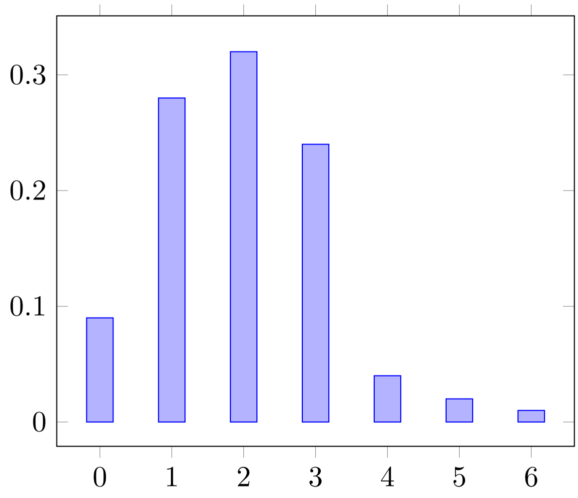

FIGURE 2.3 – Représentation des fréquences par un diagramme en bâtons (Exemple 2.3).

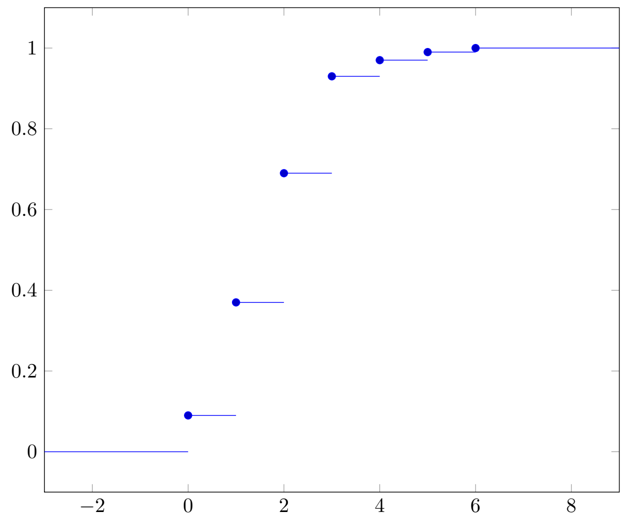

FIGURE 2.4 – Fonction de répartition d'un variable discrète (Exemple 2.3).

Paramètres de position

Le paramètre statistique le plus connu est certainement la *moyenne arithmétique* (empirique). Celle-ci représente la valeur qu'obtiendrait chaque individu de la population si ceux-ci se répartissaient les ressources équitablement.

Définition 2.6. *La* moyenne arithmétique $\overline{X}$ *(ou simplement* moyenne*) d'une série statistique est définie par :*

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r}{N},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les modalités, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ leurs effectifs respectifs et N l'effectif total de la population.

En combinant cette définition et la Définition 2.3, on obtient immédiatement une réécriture de la moyenne.

Proposition 2.2.

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i.$$

Remarque 2.4. La moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes (grandes dans les positifs ou les négatifs).

Exemple 2.3 (suite)**.** On a, avec les données de l'Exemple 2.3 :

$$\overline{X} = \frac{9 \times 0 + 28 \times 1 + 32 \times 2 + 24 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6}{100} = 1,96.$$

Un deuxième paramètre de position est le *mode*.

Définition 2.7. *On appelle* mode *d'une série statistique discrète toute modalité x_i dont l'effectif est maximal parmi tous les effectifs.*

Remarque 2.5. Le mode n'est, en général, pas unique ; une série statistique peut admettre plusieurs modes (cas d'effectif ex-æquo).

Exemple 2.3 (suite)**.** La modalité la plus fréquente dans cet exemple est 2 (l'effectif correspondant est 32). Il s'agit du mode de cette série.

Pour obtenir un indicateur de position moins sensible aux valeurs extrêmes que la moyenne, on peut chercher à séparer la série en deux parties de même effectif. Cette idée conduit à la définition de la médiane.

Définition 2.8. *On appelle* médiane *d'une série statistique toute valeur me telle que :*

$$\mathbf{P}\left[X \leq me\right] \geq 0,5 \quad \textbf{et} \quad \mathbf{P}\left[X \geq me\right] \geq 0,5.$$

Cette définition peut être généralisée pour définir la notion de *quantile*.

Définition 2.9. *Soit $p \in]0;1[$. On appelle quantile d'ordre p toute valeur q_p telle que :*

$$\mathbf{P}\left[X \leq q_p\right] \geq p \quad \textbf{et} \quad \mathbf{P}\left[X \geq q_p\right] \geq 1 - p.$$

Remarque 2.6. On peut voir que la médiane est le quantile d'ordre 0,5. Les quantiles d'ordre 0,25 et 0,75 sont appelés premier et troisième *quartiles*. Les quantiles d'ordre 0,1 et 0,9 sont appelés premier et neuvième *déciles*.

Exemple 2.3 (suite)**.** On a, dans cet exemple, que $\mathbf{P}\left[X \leq 2\right] = F(2) = 0,69 \geq 0,5$ et $\mathbf{P}\left[X \geq 2\right] = 1 - F(1) = 1 - 0,37 = 0,63 \geq 0,5$. La médiane est donc $me = 2$. Dans la pratique, on observe que $F(1) = \mathbf{P}\left[X \leq 1\right] = 0,37 \leq 0,5$ et que $F(2) = \mathbf{P}\left[X \leq 2\right] = 0,69 \geq 0,5$. Ceci suffit pour déterminer que la médiane est $me = 2$. On obtient de la même façon que le premier quartile est $q_{0,25} = 1$ et le troisième quartile est $q_{0,75} = 3$.

Paramètres de dispersion

Certains indicateurs de dispersion ont des définitions très simples, il s'agit de l'*étendue* et de l'*étendue inter-quartiles.*

Définition 2.10. *On appelle* étendue *de la série statistique la quantité* $x_r - x_1$ *où* x_1 *est la plus petite modalité et* x_r *la plus grande modalité.*

On appelle étendue inter-quartiles *de la série statistique la quantité* $q_{0,75} - q_{0,25}$ *où* $q_{0,25}$ *et* $q_{0,75}$ *sont les premier et troisième quartiles.*

Exemple 2.3 (suite)**.** On a simplement que l'étendue est $x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$ et l'étendue inter-quartiles $q_{0,75} - q_{0,25} = 3 - 1 = 2$.

Un paramètre de dispersion permettant de mesurer de quelle manière se disperse une série statistique autour de sa moyenne est la *variance.*

Définition 2.11. *La* variance $\mathrm{V}[X]$ *d'une série statistique est définie par :*

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i - \overline{X})^2 = \frac{n_1(x_1 - \overline{X})^2 + \cdots + n_r(x_r - \overline{X})^2}{N},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *sont les modalités,* $n_1, n_2, \ldots, n_r$ *leurs effectifs respectifs,* N *l'effectif total de la population et* $\overline{X}$ *la moyenne de la série.*

Remarque 2.7. Il s'agit de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

En développant les carrés et regroupant les termes, on obtient immédiatement la réécriture suivante de la variance, connue sous le nom de *formule de décentrage de la variance.*

Proposition 2.3.

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{n_1 x_1^2 + \cdots + n_r x_r^2}{N} - \overline{X}^2.$$

Du fait de l'élévation au carré, les unités se retrouvent modifiées dans la variance. Pour palier à ce problème, on introduit l'*écart-type* qui s'exprime dans la même unité que la moyenne et mesure encore la dispersion des données autour de la moyenne.

Définition 2.12. *L'*écart-type σ *d'une série statistique est défini par :*

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}.$$

Un autre problème lié aux unités est un problème d'échelle. Imaginons que l'on veuille comparer la dispersion de deux séries de longueurs, la première étant exprimée en mètres et la seconde en kilomètres. La comparaison ne peut pas se faire directement sur les écarts-types du fait des unités. On introduit pour cela un *écart-type relatif* qui est, quant à lui, sans unité.

Définition 2.13. *On appelle* écart-type relatif *(ou* coefficient de variation*) d'une série statistique la quantité :*

$$\mathrm{c_v} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \qquad \text{si } \overline{X} \neq 0.$$

Remarque 2.8. L'écart-type relatif n'est pas défini si la moyenne est nulle. Il faut être vigilant au fait que ce paramètre est sensible à la position des données.

Exemple 2.3 (suite)**.** On a, avec les données de l'Exemple 2.3 :

$$\begin{aligned} V[X] &= \frac{9 \times (0-1,96)^2 + \cdots + 1 \times (6-1,96)^2}{100} \\ &= \frac{9 \times 0^2 + \cdots + 1 \times 6^2}{100} - 1,96^2 = 1,3784. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sigma = \sqrt{1,3784} \simeq 1,1741$$

puis que

$$\mathrm{c_v} = \frac{\sqrt{1,3784}}{1,96} \simeq 0,5990.$$

La variance mesure la dispersion des données autour de la moyenne au sens des carrés des écarts. Un autre indicateur mesure la dispersion des données autour de la moyenne au sens des valeurs absolues des écarts. Il s'agit de l'*écart absolu moyen.*

Définition 2.14. *L'*écart absolu moyen EAM *d'une série statistique est défini par :*

$$\mathrm{EAM} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i|x_i - \overline{X}| = \frac{n_1|x_1 - \overline{X}| + \cdots + n_r|x_r - \overline{X}|}{N},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les modalités, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ leurs effectifs respectifs, N l'effectif total de la population et $\overline{X}$ la moyenne de la série.

Exemple 2.3 (suite)**.** On a, avec les données de l'Exemple 2.3 :

$$\mathrm{EAM} = \frac{9 \times |0-1,96| + \cdots + 1 \times |6-1,96|}{100} = 0,8904.$$

2.4 Cas quantitatif continu ou discret avec regroupement en classes

Lorsque la variable statistique à étudier est continue ou discrète mais les modalités sont nombreuses, il est utile de collecter les données en les regroupant en des classes. On suppose, dans cette section, se trouver dans une telle situation. On note $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ les classes dans lesquelles ont été regroupées les données et n_i leurs effectifs respectifs. Il est important de noter que les classes n'ont pas nécessairement des amplitudes identiques. Il convient d'être attentifs aux amplitudes des classes considérées pour interpréter les données.

2.4.1 Tableau statistique

Outre les modalités, effectifs, effectifs cumulés croissants, fréquences et fréquences cumulées croissantes définis comme dans les sections précédentes, le tableau statistique décrivant une variable continue ou discrète avec regroupement en classes contient les *amplitudes*, *amplitudes relatives*, *effectifs relatifs* et *fréquences relatives.*

Définition 2.15. 1. *L'*amplitude *de la classe* $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ *est la quantité* $a_i = b_i - b_{i-1}$.

2. *Étant fixé un paramètre* A *(arbitraire), l'*amplitude relative *de la classe* $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ *est la quantité* $a_i^r = \frac{a_i}{A}$*, son effectif relatif est* $n_i^r = \frac{n_i}{a_i^r}$ *et sa* fréquence relative *est la quantité* $f_i^r = \frac{f_i}{a_i^r}$.

Remarque 2.9.

1. En général, on choisit comme amplitude de référence A, l'amplitude la plus courante ou toute amplitude paraissant rendre les calculs les plus simples possibles et les représentations graphiques agréables.
2. Il est immédiat de vérifier que l'on peut réécrire f_i^r sous la forme $f_i^r = \frac{n_i^r}{N}$.
3. La quantité f_i^r représente la densité de la classe C_i et est primordiale pour les représentations et interprétations dans les cas avec regroupement en classes. On peut ici faire l'analogie avec la densité de population en géographie (il est plus judicieux de regarder les densités de populations que les effectifs pour décider quelle région est la plus peuplée ; par exemple, comparer la population de Dijon intra-muros et du reste de la Bourgogne en nombre d'habitants puis en densité de population.).

Exemple 2.4. Durant le mois de janvier 2016, on a relevé les précipitations journalières (exprimées en mm) sur Dijon. On a consigné les résultats dans le tableau suivant.

Hauteur des précipitations (en mm)	$[0;1[$	$[1;3[$	$[3;6[$	$[6;9[$	$[9;14[$
Nombre de jours	17	5	5	2	2

La population étudiée est l'ensemble des jours sur le mois de janvier 2016 et la variable statistique étudiée est la hauteur des précipitations relevées à Dijon chaque jour. Il s'agit d'une variable quantitative continue. On choisit (arbitrairement) de normaliser par $A = 1$, de sorte que $a_i^r = a_i$. On dresse le tableau statistique complet de cette série en notant $N = 31$ l'effectif total et pour $i \in \{1, \dots, 5\}$:

— $C_i = [b_{i-1}; b_i[$ la i^{e} classe,
— $c_i = \frac{b_{i-1}+b_i}{2}$ le centre de la i^{e} classe,
— $a_i = b_i - b_{i-1}$ l'amplitude de la i^{e} classe,
— $a_i^r = \frac{a_i}{A} = a_i$,
— n_i l'effectif de la i^{e} classe,
— $f_i = \frac{n_i}{N}$ la fréquence de la i^{e} classe,
— n_i^r l'effectif relatif de la i^{e} classe,
— $f_i^r = \frac{n_i^r}{N}$ la fréquence relative de la i^{e} classe,
— N_i l'effectif cumulé croissant jusqu'à la i^{e} classe,
— $F_i = \frac{N_i}{N}$ la fréquence cumulée croissante jusqu'à la i^{e} classe.

i	C_i	c_i	$a_i = a_i^r$	n_i	f_i	n_i^r	f_i^r	N_i	F_i
1	$[0;1[$	0,5	1	17	0,55	17	0,55	17	0,55
2	$[1;3[$	2	2	5	0,16	2,5	0,08	22	0,71
3	$[3;6[$	4,5	3	5	0,16	1,67	0,05	27	0,87
4	$[6;9[$	7,5	3	2	0,06	0,67	0,02	29	0,94
5	$[9;14[$	11,5	5	2	0,06	0,4	0,01	31	1

2.4.2 Représentations graphiques

Histogramme des fréquences

Contrairement à ce qui a été fait dans les cas qualitatifs et quantitaifs sans regroupement en classes, l'histogramme des fréquences prend ici la forme d'un diagramme en rectangles tel que l'**aire** du rectangle associé à une classe représente sa fréquence. Le rectangle associé à une classe a pour largeur son amplitude et pour **hauteur** sa fréquence **relative**. On peut encore commenter à l'aide de cet histogramme la symétrie ou dissymétrie de la distribution.

La Figure 2.5 représente l'histogramme des fréquences relatives obtenu dans l'Exemple 2.4. On observe dans ce cas une *traine* (ou *queue de distribution*) étalée vers la droite.

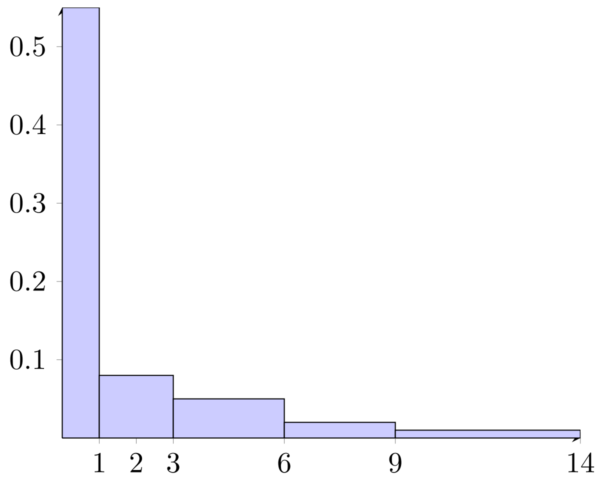

FIGURE 2.5 – Histogramme des fréquences relatives (Exemple 2.4).

Polygone des fréquences cumulées croissantes et fonction de répartition

Supposons que l'on dispose de r classes $C_1 = [b_0, b_1[, \ldots, C_r = [b_{r-1}, b_r[$. Le polygone des fréquences cumulées est la ligne polygonale dont l'ordonnée est nulle pour $x \leq b_0$, vaut 1 pour $x \geq b_r$ et interpolant linéairement les points $(b_0, 0), (b_1, F_1), \ldots, (b_{r-1}, F_{r-1}), (b_r, F_r = 1)$ (c'est-à-dire reliant deux points successifs par un segment). Le polygone des fréquences cumulées fournit une approximation de la fonction de répartition de la variable statistique étudiée. Plus précisément, si l'on fait l'hypothèse que les données se répartissent uniformément au sein de chaque classe, le polygone des fréquences cumulées est le graphe de la fonction de répartition $t \mapsto F(t) = \mathbf{P}[X \leq t]$ de la variable aléatoire X. On fait usuellement cette hypothèse.

On peut observer qu'une variable aléatoire continue satisfait les propriétés suivantes.

Proposition 2.4. *Soit X une variable aléatoire continue. La fonction de répartition de X est croissante et* **continue***. En particulier, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:*

$$\mathbf{P}[X < x] = \mathbf{P}[X \leq x] = F(x) \quad et \quad \mathbf{P}[X = x] = 0.$$

La Figure 2.6 représente la fonction de répartition obtenue dans l'Exemple 2.4.

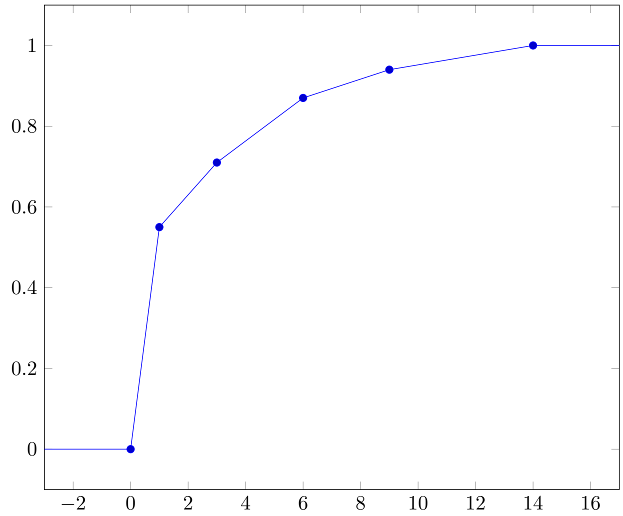

FIGURE 2.6 – Fonction de répartition d'une variable continue (Exemple 2.4).

On n'a accès, sans calcul supplémentaire, qu'aux valeurs de la fonction de répartition de X qu'en les points de $]-\infty, b_0] \cup \{b_1, \ldots, b_{r-1}\} \cup [b_r, +\infty[$. Puisque les autres valeurs sont obtenues par interpolation linéaire, le théorème de Thalès permet d'obtenir facilement la valeur de $F(x)$ pour $x \in C_i = [b_{i-1}, b_i[$ (voir Figure 2.7). En effet, celui-ci permet d'affirmer que :

$$\frac{F(x) - F(b_{i-1})}{F(b_i) - F(b_{i-1})} = \frac{x - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}, \text{ pour } x \in [b_{i-1}, b_i[.$$

Alternativement, puisque le graphe de la fonction de répartition est un segment de droite entre les abscisse b_{i-1} et b_i, la proposition suivante peut s'obtenir en déterminant l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $(x_A, y_A) = (b_{i-1}, F(b_{i-1})$ et B de coordonnées $(x_B, y_B) = (b_i, F(b_i)$. L'équation de cette droite de la forme $y = ax + b$ est caractérisée par la donnée de son coefficient directeur

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{F(b_i) - F(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}}$$

et de son ordonnée à l'origine déterminée en profitant du fait qu'elle passe en particulier par le point A en écrivant que :

$$F(b_{i_1}) = y_A = ax_A + b = \frac{F(b_i) - F(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} b_{i-1} + b$$

et donc

$$\begin{aligned} b = F(b_{i_1}) - \frac{F(b_i) - F(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} b_{i-1} &= \frac{F(b_{i-1})(b_i - b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} - \frac{F(b_i)b_{i-1} - F(b_{i-1})b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \\ &= \frac{F(b_{i-1})b_i - F(b_{i-1})b_{i-1} - F(b_i)b_{i-1} + F(b_{i-1})b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} = \frac{F(b_{i-1})b_i - F(b_i)b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi que :

Proposition 2.5. *Soit X une variable statistique continue dont la fonction de répartition est notée F. Pour tout x dans la classe $C_i = [b_{i-1}, b_i[$, on a :*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \left(F(b_i) - F(b_{i-1})\right) + F(b_{i-1}) \\
&= \frac{F(b_i) - F(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} x + \frac{F(b_{i-1})b_i - F(b_i)b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \\
&= \frac{f_i^r}{A}(x - b_{i-1}) + F(b_{i-1}),
\end{aligned}$$

où A est l'amplitude de référence choisie pour la normalisation et f_i^r la fréquence relative de la classe C_i.

Preuve : La première identité est une conséquence du Théorème de Thalès ; la deuxième s'obtient en écrivant l'équation de la droite passant par les points de coordonnées $(b_{i-1}, F(b_{i-1})$ et $(b_i, F(b_i)$; la troisième s'obtient à partir de la première par le jeu d'écriture suivant :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \left(F(b_i) - F(b_{i-1})\right) + F(b_{i-1}) \\
&= \frac{x - b_{i-1}}{a_i} f_i + F(b_{i-1}) \\
&= \frac{f_i}{Aa_i^r}(x - b_{i-1}) + F(b_{i-1}) \\
&= \frac{f_i^r}{A}(x - b_{i-1}) + F(b_{i-1}).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.10. Lorsque $A = 1$, f_i^r est le coefficient directeur du segment de droite correspondant à la classe C_i dans le polygone des fréquences cumulées et s'interprète alors pleinement comme la densité de cette classe. Dans ce cas, $F(t)$ est l'aire de la partie de l'histogramme de X située à gauche de la droite d'équation $x = t$.

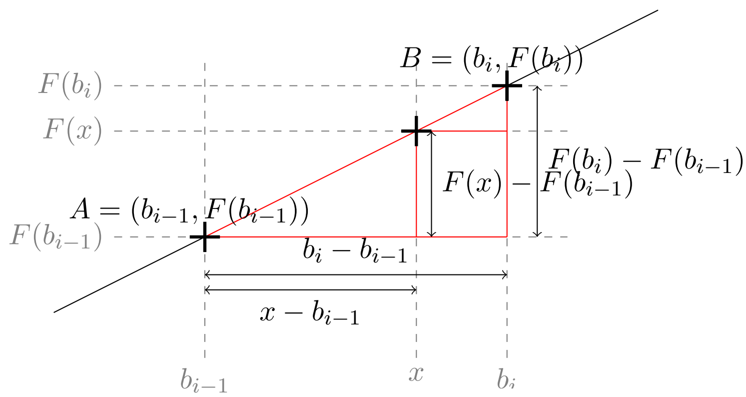

FIGURE 2.7 – Illustration de la méthode d'interpolation linéaire à l'aide du Théorème de Thalès.

Exemple 2.4 (suite)**.** Illustrons la méthode d'interpolation linéaire à l'aide de l'Exemple 2.4. On a :

$$\mathbf{P}[X \geq 2] = 1 - \mathbf{P}[X < 2] = 1 - \mathbf{P}[X \leq 2] = 1 - F(2).$$

On utilise que le meilleur encadrement de 2 par des bornes de classes est $1 < 2 < 3$ et la méthode d'interpolation linéaire pour déterminer $F(2)$. Celle-ci donne que :

$$\frac{F(2) - F(1)}{F(3) - F(1)} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

donc

$$F(2) = \frac{1}{2}(F(3) - F(1) + F(1) = \frac{1}{2}(0,71 - 0,55) + 0,55 = 0,63.$$

Ainsi, $\mathbf{P}[X \geq 2] = 1 - F(2) = 1 - 0,63 = 0,37$ et on a relevé au moins $2mm$ de précipitations durant 37% des jours.

2.4.3 Paramètres statistiques

Les paramètres statistiques sont définis dans le cas continu dans le même esprit que dans le cas discret. Il faut cependant faire attention à quelques subtilités. La première porte sur la définition des classes modales.

Définition 2.16. *On appelle* classe modale *d'une série statistique continue ou discrète avec regroupements en classes toute classe* $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ *dont l'effectif* **relatif** *est maximal parmi tous les effectifs* **relatifs***.*

Remarque 2.11. La classe modale n'est, en général, pas unique. On peut formuler la définition en remplaçant *effectif relatif* par *fréquence relative*. Il est primordial de garder en tête l'idée de « classe la plus densément peuplée » et de ne pas oublier l'adjectif **relatif** dans cette définition.

À cause du regroupement en classes, on n'aura pas accès ici aux valeurs exactes de la moyenne, de la variance, de l'écart-type, du coefficient de variation ou de l'écart-absolu moyen, mais seulement à des approximations de ceux-ci. En fait, pour faire les calculs, il faut remplacer les modalités qui apparaissent dans les formules par un représentant de chaque classe. En faisant, par convention, l'hypothèse d'une répartition uniforme au sein de chaque classe, on choisit pour représentant de la classe $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ son centre $c_i = \frac{b_{i-1}+b_i}{2}$. Avec ces notations, ces paramètres se calculent avec les formules :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i = \frac{n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r}{N},$$

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i (c_i - \overline{X})^2 = \frac{n_1(c_1 - \overline{X})^2 + \cdots + n_r(c_r - \overline{X})^2}{N},$$

$$\mathrm{V}[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{n_1 c_1^2 + \cdots + n_r c_r^2}{N} - \overline{X}^2.$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]}.$$

$$\mathrm{c_v} = \frac{\sigma}{\overline{X}}.$$

$$\mathrm{EAM} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i|c_i - \overline{X}| = \frac{n_1|c_1 - \overline{X}| + \cdots + n_r|c_r - \overline{X}|}{N}.$$

Médiane, quantiles, étendue et étendue inter-quartile sont définis exactement comme dans la section précédente. On peut toutefois donner une définition plus maniable de la médiane et des quantiles dans le cas de variables statistiques continues.

Proposition 2.6. *Soit X une variable statistique continue et F sa fonction de répartition.*
On appelle médiane *toute valeur me telle que $F(me) = 0,5$.*
On appelle quantile *d'ordre p toute valeur q_p telle que $F(q_p) = p$.*

Remarque 2.12. Pour déterminer une médiane dans le cas continu, on commence par déterminer dans quelle classe $C_i = [b_{i-1}, b_i[$ celle-ci se trouve. On utilise, dans un second temps, la méthode d'interpolation linéaire pour déterminer la valeur exacte de me grâce à la relation :

$$\frac{me - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} = \frac{\frac{1}{2} - F(b_{i-1})}{F(b_i) - F(b_{i-1})}.$$

On procède de manière analogue pour déterminer un quantile.

Exemple 2.4 (suite)**.** Les paramètres de la série statistique de l'Exemple 2.4 sont les suivants :

— la classe modale est la classe ayant la fréquence relative la plus élevée ; il s'agit ici de la classe $C_1 = [0; 1[$.

— la moyenne (arithmétique) est donnée par :

$$\overline{X} = \frac{n_1c_1 + \cdots + n_5c_5}{N} \simeq 2,5483871;$$

— La médianne me est la valeur telle que $F(me) = \mathbf{P}[X \leq me] = 0,5$. On a $F(0) = 0$ et $F(1) = 0,55$ et cette valeur est dans la classe $C_1 = [0; 1[$. On détermine me par interpolation linéaire :

$$\frac{me - 0}{1 - 0} = \frac{F(me) - F(0)}{F(1) - F(0)}$$

soit

$$me = \frac{0,5}{0,55} = \frac{10}{11} \simeq 0,90909;$$

— La variance est donnée par :

$$\mathrm{V}[X] = \frac{n_1(c_1 - \overline{X})^2 + \cdots + n_5(c_5 - \overline{X})^2}{N} = \frac{n_1c_1^2 + \cdots + n_5c_5^2}{N} - \overline{X}^2 \simeq 9,71540;$$

— l'écart-type est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}[X]} \simeq 3,11695;$$

— le coefficient de variation est donné par :

$$\mathrm{c_v} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \simeq 1,22310;$$

— l'écart-absolu moyen est donné par :

$$\mathrm{EAM} = \frac{n_1|c_1 - \overline{X}| + \cdots + n_5|c_5 - \overline{X}|}{N} \simeq 2,42352.$$

2.5 Complément : d'autres moyennes

La moyenne arithmétique définie dans la Définition 2.6, est certainement la plus connue et la plus fréquement utilisée. Il existe pourtant d'autres notions de moyenne qui sont, dans des situations particulières, plus adaptées ou représentatives.

Par exemple, supposons que pour se rendre sur son lieu de vacances, une famille réalise son trajet aller à une vitesse de 80km/h et son trajet retour à une vitesse de 60km/h. On peut chercher à déterminer la vitesse moyenne de la famille lors de cet aller-retour et nous allons voir que la moyenne arithmétique n'est pas adaptée. Notons D la distance séparant le lieu de vacances du domicile de la famille. Lors de son trajet aller, la famille a parcouru cette distance D en un temps de $T_{\text{aller}} = \frac{D}{80}$ heures. Lors de son trajet retour, la famille a parcouru cette distance D en un temps de $T_{\text{retour}} = \frac{D}{60}$ heures. Ainsi, sur l'aller-retour, la famille a parcouru une distance de $2D$ en un temps $T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}}$. Sa vitesse moyenne sur l'aller-retour est donc :

$$\begin{aligned}\frac{2D}{T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}}} &= \frac{2D}{\frac{D}{80} + \frac{D}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{60}} \\ &= \frac{2}{\frac{3}{240} + \frac{4}{240}} = \frac{480}{7} \simeq 68,57\text{km/h}.\end{aligned}$$

Nous venons de construire la *moyenne harmonique* des deux vitesses.

Définition 2.17. *Soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbf{R}^*$ tels que $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i} \neq 0$.*

On appelle moyenne harmonique *de $a_1, \dots, a_N$ la quantité :*

$$\mathrm{H} = \frac{N}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}}.$$

Remarque 2.13.

1. Si les différentes valeurs prises par les a_i sont $x_1, \dots, x_r$ avec multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$, la moyenne harmonique se réécrit sous la forme :

$$\mathrm{H} = \frac{N}{\frac{n_1}{x_1} + \cdots + \frac{n_r}{x_r}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x_i}},$$

avec $N = n_1 + \cdots + n_r$.

2. Lorsqu'elle est bien définie, la moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses.

Définition 2.18. *Soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbf{R}_+^*$.*

On appelle moyenne géométrique *de $a_1, \dots, a_N$ la quantité :*

$$G = (a_1 \times \cdots \times a_N)^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} a_i}.$$

Remarque 2.14.

1. Si les différentes valeurs prises par les a_i sont $x_1, \ldots, x_r$ avec multiplicités respectives $n_1, \ldots, n_r$, la moyenne géométrique se réécrit sous la forme :

$$\mathrm{G} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}},$$

   avec $N = n_1 + \cdots + n_r$.
2. Lorsqu'elle est bien définie, la moyenne géométrique est l'exponentielle de la moyenne arithmétique des logarithmes des valeurs.
3. La moyenne géométrique doit son nom au fait que, pour tous $a, b > 0$, la longueur du carré dont la surface est la même que celle du rectangle de côtés a et b, est la moyenne géométrique de ces deux nombres.
4. Moins sensible que la moyenne arithmétique aux valeurs les plus extrêmes d'une série de données, la moyenne géométrique donne une meilleure estimation de la tendance centrale des donnés dans le cas d'une distribution à longue traîne. Par exemple, si l'on s'intéresse au salaire moyen dans une entreprise, la moyenne géométrique sera moins « tirée vers le haut » par les (rares) salaires les plus élevés que la moyenne arithmétique. De façon générale, l'utilisation de cette notion de moyenne sera adaptée dans les cas où les valeurs sont pour la plus part du même ordre de grandeur et que de rares valeurs extrèmement hautes par rapport aux autres viennent perturber la tendance centrale.

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions, quelques fonctions usuelles et méthodes de résolution d'équations

Dans ce chapitre, on introduit et donne les propriétés de certaines fonctions usuelles nécessaires dans le contexte des mathématiques financières. Ce chapitre sera complété au Semestre 2 par un chapitre dédié à l'étude des fonctions et à ses applications en économie.

3.1 Premières définitions

Définition 3.1. *Une* fonction *(réelle) f associe à tout nombre réel x appartenant à un certain ensemble D_f, appelé* ensemble de définition *de f, un nombre réel $f(x)$, appelé* image *de x par f ou* valeur *de la fonction f en x.*

Remarque 3.1. Dans les exemples qui nous intéresseront, les domaines de définition des fonctions seront des intervalles ou des réunions (finies) d'intervalles. Lorsque la fonction f admet une formulation explicite, sous une forme close, son domaine de définition est l'ensemble des réels pour lesquels cette expression est calculable.

Exemple 3.1. La fonction f définie par $f(x) = 2x+1$ est définie sur $\mathbf{R}$ ($D_f = \mathbf{R}$). La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ admet pour domaine de définition $D_g = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ puisque l'on ne peut pas diviser par 0.

Définition 3.2. *Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$.*

On dit que f est :

1. croissante *sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique que $f(x) \leq f(y)$;*
2. strictement croissante *sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique que $f(x) < f(y)$;*
3. décroissante *sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique que $f(x) \geq f(y)$;*
4. strictement décroissante *sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique que $f(x) > f(y)$.*

Exemple 3.1 (suite)**.** La fonction f de l'Exemple 3.1 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et la fonction g, de ce même exemple, est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (mais pas sur $\mathbf{R}^*$!).

Définition 3.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement telles que f prenne ses valeurs dans un ensemble $E \subset D_g$.*

On appelle composée *de f par g la fonction $g \circ f$ définie par :*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \textit{pour tout } x \in D_f.$$

Définition 3.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement.*

On dit que f et g sont réciproques *l'une de l'autre si*

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \textit{pour tout } x \in D_f \qquad \textit{et} \qquad (f \circ g)(y) = y, \qquad \textit{pour tout } y \in D_g.$$

On note alors $g = f^{-1}$.

Remarque 3.2.

1. Certaines fonctions n'admettent pas de réciproque. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2$ n'admet pas de réciproque sur $\mathbf{R}$; par contre, sa restriction à $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty[$ admet pour réciproque la fonction racine carrée $y \longmapsto \sqrt{y}$.
2. Si une fonction est strictement monotone (*i.e.* strictement croissante ou strictement décroissante) alors elle admet une réciproque.
3. Si f et g sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan (*i.e.* la droite d'équation $y = x$).

Exemple 3.1 (suite)**.** La fonction f de l'Exemple 3.1 admet pour réciproque la fonction h définie par $h(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. En effet, ces deux fonction sont définies sur $\mathbf{R}$ et on a :

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}$$

et

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = 2h(y) + 1 = 2\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) + 1 = y, \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}.$$

La fonction g (fonction *inverse*) de ce même exemple est sa propre réciproque. Le vérifier en exercice.

3.2 Fonctions usuelles

3.2.1 Fonctions puissances et racines

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ pair, la fonction *puissance* k^e $x \longmapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et l'image de $\mathbf{R}_+$ par cette fonction est $\mathbf{R}_+$ lui-même. Sa réciproque sur $\mathbf{R}_+$ est appelée *racine* k^e et est notée $\sqrt[k]{\cdot}$ ou $\cdot^{\frac{1}{k}}$. De la même façon, pour $k \in \mathbf{N}^*$ impair, la fonction *puissance* k^e $x \longmapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et l'image de $\mathbf{R}$ par cette fonction est $\mathbf{R}$ lui-même. Sa réciproque sur $\mathbf{R}$ est appelée *racine* k^e et est notée $\sqrt[k]{\cdot}$ ou $\cdot^{\frac{1}{k}}$.

Ces définitions s'étendent aux cas des exposants négatifs, les fonctions puissances d'exposant strictement négatif étant strictement décroissantes.

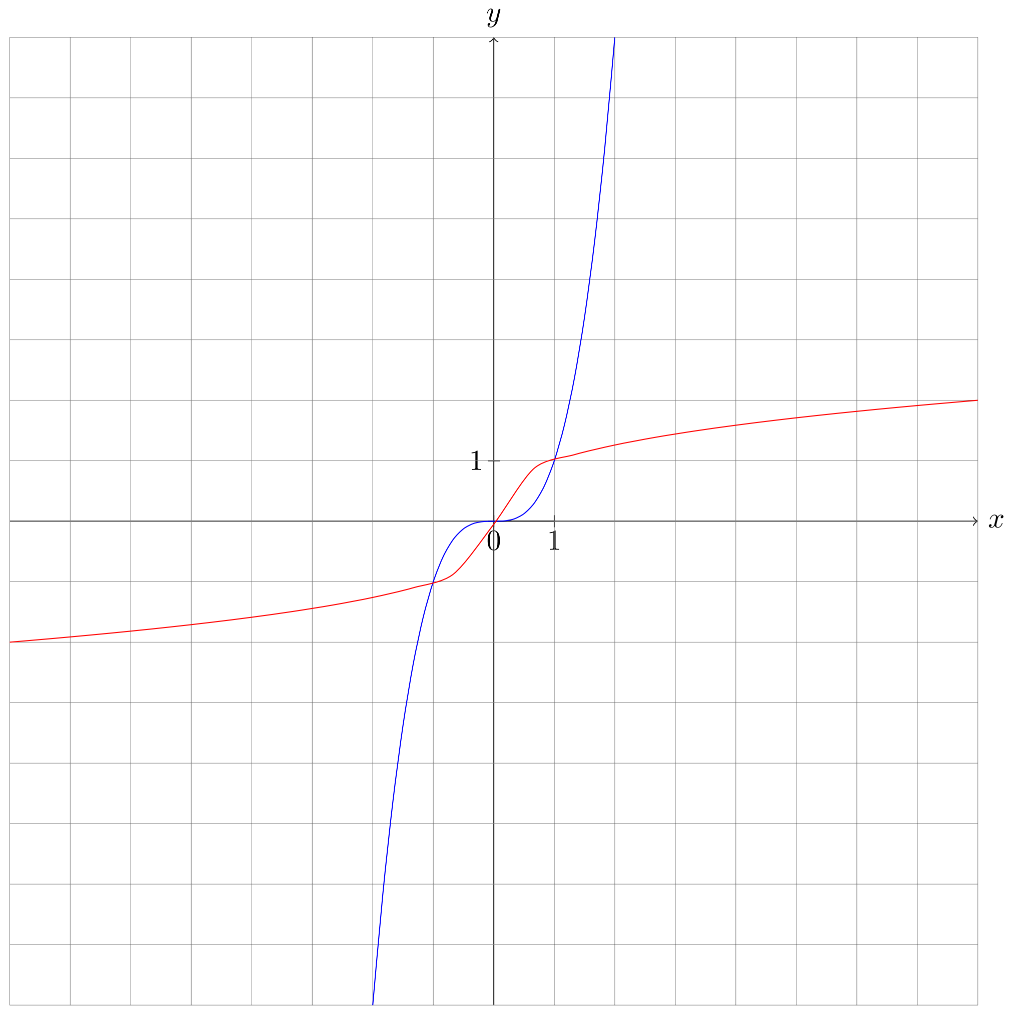

FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction $x \longmapsto x^3$ (bleu) et de sa réciproque $x \longmapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (rouge).

3.2.2 Fonctions indicatrices

Définition 3.5. *Soit $A \subset \mathbf{R}$. On appelle* fonction indicatrice *de l'ensemble A la fonction notée $\mathbf{1}_A(\cdot)$ et définie sur $\mathbf{R}$ par :*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

3.2.3 Fonction valeur absolue

Définition 3.6. *On appelle* (fonction) valeur absolue *la fonction notée $|\cdot|$ et définie sur $\mathbf{R}$ par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & sinon \end{cases}.$$

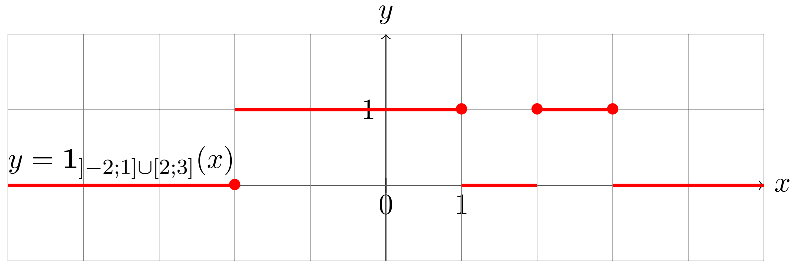

FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction indicatrice de l'ensemble $A =]-2;1] \cup [2;3]$.

Il est immédiat de vérifier que l'on a l'inégalité triangulaire suivante :

Proposition 3.1 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a :*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

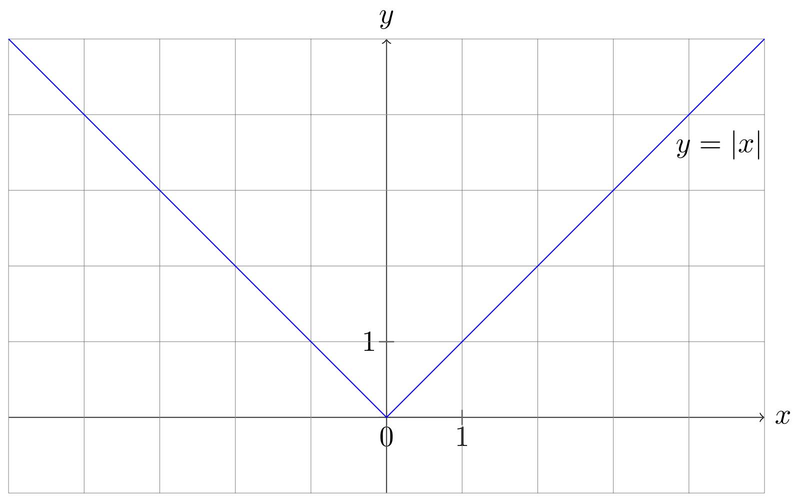

FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction valeur absolue.

3.2.4 Fonctions linéaires et affines

Définition 3.7. *On appelle fonction* linéaire *toute fonction f s'écrivant sous la forme*

$$f(x) = ax, \qquad \textit{pour un certain } a \in \mathbf{R}.$$

On appelle fonction affine *toute fonction f s'écrivant sous la forme*

$$f(x) = ax + b, \qquad \textit{pour certains } a, b \in \mathbf{R}.$$

Remarque 3.3.

1. Si une fonction est linéaire, elle est en particulier affine.

2. Une fonction affine est strictement croissante si, et seulement si, $a > 0$ et est strictement décroissante si, et seulement si, $a < 0$. Elle est constante si $a = 0$.
3. Le graphe d'une fonction affine est une droite dont le coefficient directeur est a et l'ordonnée à l'origine b.

3.2.5 Fonctions quadratiques

Définition 3.8. *On appelle* fonction quadratique *toute fonction f s'exprimant sous la forme :*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{avec } a \in \mathbf{R}^* \text{ et } b, c \in \mathbf{R}.$$

Remarque 3.4.

1. Les fonctions quadratiques sont définies sur $\mathbf{R}$.
2. Une fonction quadratique n'est autre qu'un polynôme de degré 2.

Définition 3.9. *On appelle* discriminant *du polynôme de degré 2 $ax^2 + bx + c$ la quantité :*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

La proposition suivante permet de déterminer les éventuelles racines de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, c'est-à-dire les éventuelles solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Proposition 3.2. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2.*

1. *Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines simples :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, alors f admet une racine double :*

$$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine.*

La courbe représentative d'une fonction quadratique est une parabole dont les branches sont orientées vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. Il est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$. La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un *minimum global* (resp. *maximum global*) en $x = \frac{-b}{2a}$ si $a > 0$ (resp. $a < 0$).

Exemple 3.2. Soit $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$. Le coefficient du monôme de degré 2 est $a = 3 > 0$. La courbe représentative de f est donc une parabole dont les branches sont orientées vers le haut. Cette parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-9)}{2\times 3} = \frac{3}{2}$. La fonction f admet un minimum global en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2 > 0.$$

Ses racines sont donc

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - 15}{2 \times 3} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + 15}{2 \times 3} = 4.$$

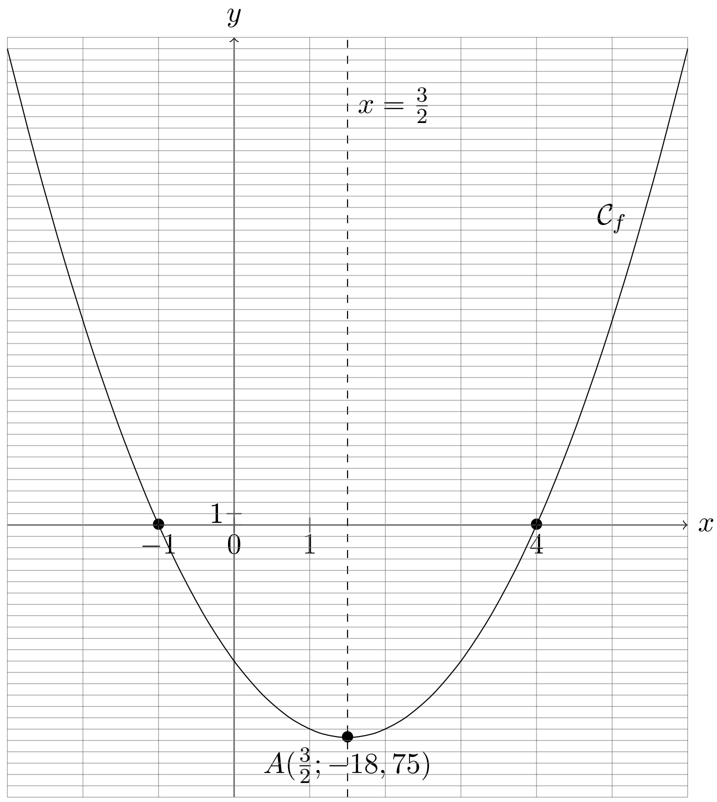

FIGURE 3.4 – Courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$ et son axe de symétrie (pointillés). Cette fonction atteint son minimum $-18,75$ en $\frac{3}{2}$.

3.2.6 Fonctions polynomiales

Définition 3.10. *On appelle* fonction polynomiale*, ou simplement* polynôme*, de degré $n \in \mathbf{N}^*$ toute fonction f s'écrivant sous la forme :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \in \mathbf{R}^*$ et $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}$.

Remarque 3.5.

1. Les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbf{R}$.
2. Toute fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines.

3.2.7 Fonction inverse

Définition 3.11. *On appelle fonction* inverse *la fonction :*

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^* &\longrightarrow \mathbf{R}^*. \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction inverse est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0; +\infty[$ et est sa propre réciproque. Son graphe est représenté dans la Figure 3.5.

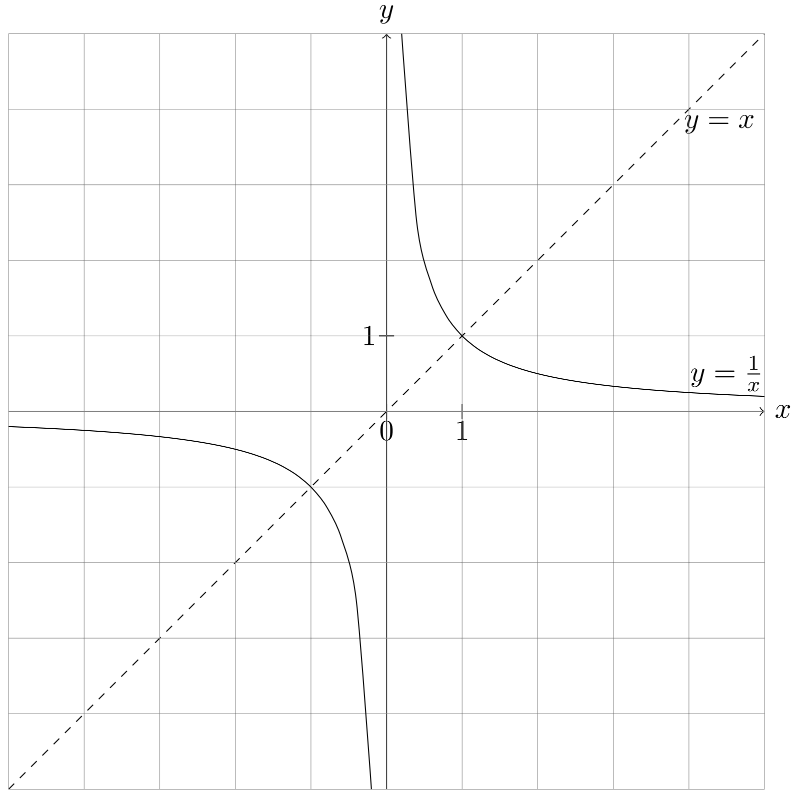

Figure 3.5 – Courbe représentative de la fonction inverse. Cette fonction étant sa propre réciproque, sa courbe représentative est symétrique par rapport à la première bissectrice du plan (pointillés).

3.2.8 Fonctions rationnelles

Définition 3.12. *On appelle* fonction rationnelle *toute fonction f s'écrivant sous la forme :*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes. Le domaine de définition d'une telle fonction est :

$$D_f = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Exemple 3.3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Cette fonction est une fonction rationnelle et son domaine de définition est :

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbf{R} : \, x^2 - 2x + 1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbf{R} : \, (x-1)^2 \neq 0\right\} \\ &= \mathbf{R} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Son graphe est donné dans la Figure 3.6.

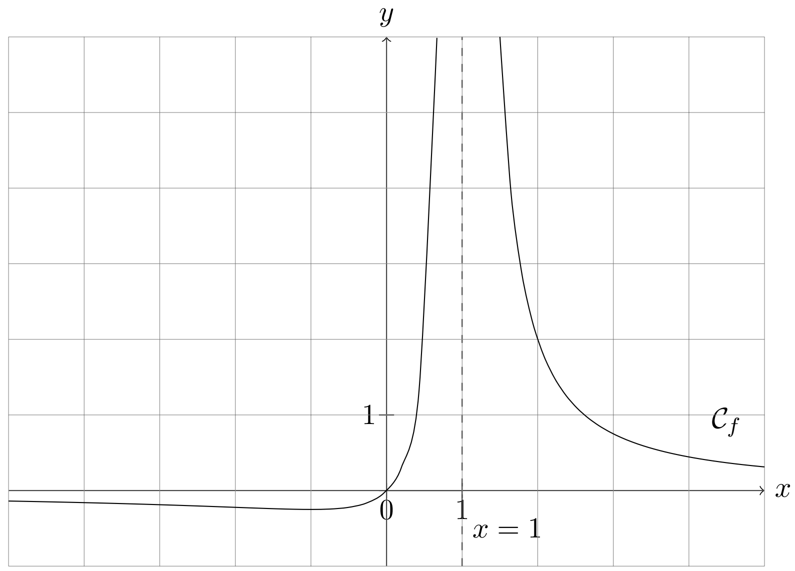

FIGURE 3.6 – Courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$. Celle-ci admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

3.2.9 Fonction exponentielle à base e

On note e le *nombre d'Euler*, également appelé constante de Néper, défini par :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2,718281828459$$

où $0! = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Définition[-Théorème] 3.13. *Il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}_+^*$ continue en au moins un point, valant e en 1 et transformant la somme en produit, c'est-à-dire vérifiant :*

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), \qquad \textit{pour tous } x, y \in \mathbf{R}.$$

Cette fonction est appelée exponentielle de base e *ou simplement* exponentielle *et est notée* $\exp(\cdot)$ *ou* $e^{\cdot}$.

Proposition 3.3 (Admise et rappel de la caractérisation)**.**

1. *La fonction* exp *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$.

2. *L'image de* $\mathbf{R}$ *par* exp *est* $\mathbf{R}_+^*$ *; en particulier* exp *est à valeurs strictement positives.*
3. *On a, pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$ *:*

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad et \quad \exp(xy) = (\exp(x))^y .$$

et par défintion $x, y \in \mathbf{R}$ *:*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad d'où \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Remarque 3.6. On a défini ici la fonction exponentielle par ces propriétés algébriques. Une définition alternative de cette fonction est la suivante. La fonction exponentielle (de base e) est l'unique fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, valant 1 en 0, dérivable sur $\mathbf{R}$ et étant sa propre dérivée (voir cours du Semestre 2), c'est-à-dire vérifiant :

$$f'(x) = f(x), \quad pour\ tout\ x \in \mathbf{R}.$$

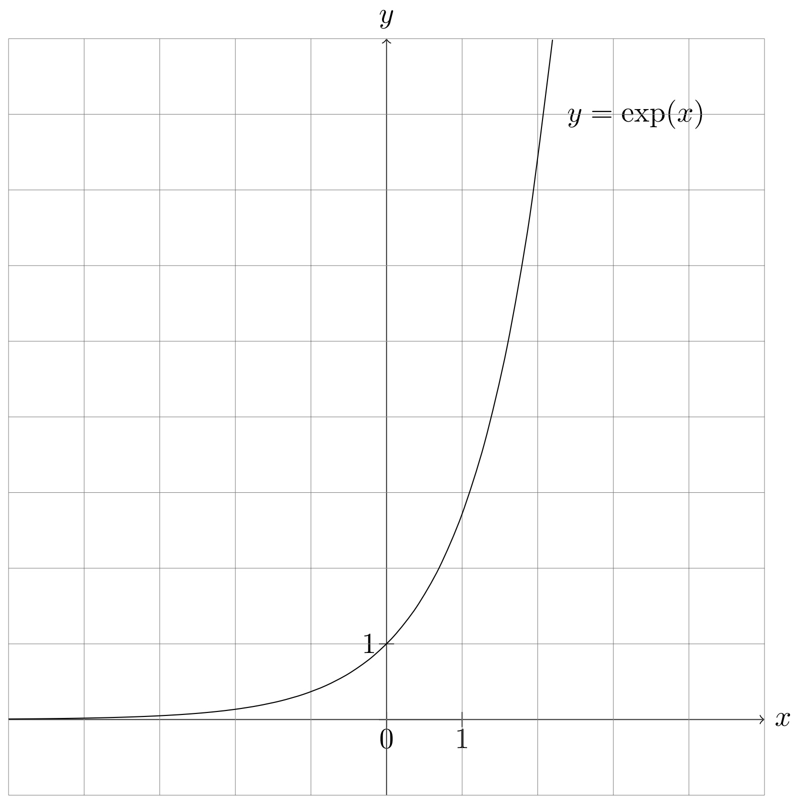

FIGURE 3.7 – Courbe représentative de la fonction exponentielle (de base e).

3.2.10 Logarithme népérien

Définition[-Théorème] 3.14. *La fonction* exp *admet une fonction réciproque définie sur* $\mathbf{R}_+^*$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$. *Cette fonction est appellée* logarithme népérien *et est notée* $\ln(\cdot)$.

Remarque 3.7. En d'autres termes, ln est la fonction telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in \mathbf{R}_+^*$:

$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

En particulier, $\ln(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$.

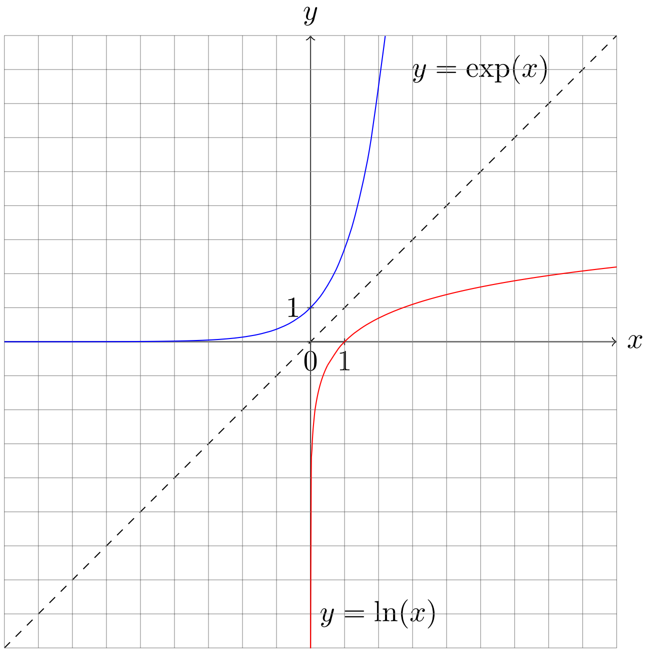

FIGURE 3.8 – Courbe représentative de la fonction logarithme népérien (rouge). Cette courbe est le symétrique par rapport à la première bissectrice du plan (pointillés) de celle de la fonction exponentielle (bleu).

Proposition 3.4.

1. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$.
2. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

3. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

4. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *et tout* $p \in \mathbf{R}$, *on a :*

$$\ln\left(x^p\right) = p\ln(x).$$

Remarque 3.8. Les points 1. et 4. de la proposition précédente seront particulièrement utiles en mathématiques fiancière pour la résolution déquations ou inéquations en n du type $a^n = b$,

$a^n \geq b$ ou $a^n \leq b$. Par exemple, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} 3^n \geq 1000 &\iff \ln(3^n) \geq \ln(1000) \quad \text{(car ln est croissante, point 1.)} \\ &\iff n\ln(3) \geq \ln(1000) \quad \text{(par le point 4.)} \\ &\iff n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \simeq 6,29 \quad \text{(car } \ln(3) > 0). \end{aligned}$$

Exercice 3.1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1. $2\ln(x+1) - \ln(2x) = 1$;
2. $2\exp(2x) + \exp(x) = 3$.

Exercice 3.2. Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(\mathrm{S}_1) \begin{cases} \exp(y-1)\exp(x-4) = 1 \\ \ln(3x) + \ln(y/3) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{S}_2) \begin{cases} x + y = 10 \\ 2^x - 5^y = 0 \end{cases}.$$

3.3 Complément : exponentielles et logarithmes à base $a > 0$

3.3.1 Fonctions exponentielles

Définition[-Théorème] 3.15. *Soit $a > 0$. Il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}_+^*$ continue en au moins un point, valant a en 1 et transformant la somme en produit, c'est-à-dire vérifiant :*

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbf{R}.$$

Cette fonction est appelée exponentielle de base a *et est notée* $\exp_a(\cdot)$ *ou* $a^{\cdot}$.

Proposition 3.5 (Admise)**.** *Soit $a > 0$.*

1. $\exp_a(x) = a^x = \exp(x\ln(a))$
2. $\exp_a(0) = 1$.
3. *Si $0 < a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$; si $a = 1$, $\exp_1$ est constante égale à 1 ; si $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.*
4. *On a, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:*

$$\exp_a(0) = a^0 = 1, \quad \exp_a(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\exp_a(x)} \quad \text{et} \quad a^{xy} = (a^x)^y.$$

3.3.2 Logarithme à base $a > 0$, $a \neq 1$

Définition 3.16. *Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On appelle* logarithme à base a *la fonction notée* $\log_a(\cdot)$ *et définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Proposition 3.6 (Admise)**.** *Soit $a > 0$, $a \neq 1$.*

1. *La fonction* $\log_a$ *est la réciproque de la fonction exponentielle de base a. Elle est telle que, pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *et tout* $y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$y = \exp_a(x) \Longleftrightarrow x = \log_a(y).$$
2. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *on a* $a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$.
3. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$
4. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$
5. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$\log_a(x^p) = p\log_a(x).$$

3.4 Complément : puissances arbitraires

On a donc pu définir les fonctions puissance pour des exposants entiers naturels ou inverses d'entiers naturel. On peut aisément étendre ces définitions au cas d'exposants rationnels. Pour le cas des exposants arbitraires, on a recours aux fonctions exponentielle et logarithme.

Définition 3.17. *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $x \in \mathbf{R}_+^*$. *On définit la puissance* α *de* x *par :*
$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarque 3.9.
1. On peut vérifier que cette définition est cohérente avec les règles de calcul usuelles :
$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$
et la notation $x^{\frac{1}{k}}$ introduite précédemment pour la racine k^{e}.
2. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ a un comportement très différent selon que $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ comme l'illustre la Figure 3.9.

3.5 Complément : preuves

Preuve de la Proposition 3.2 : On a :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

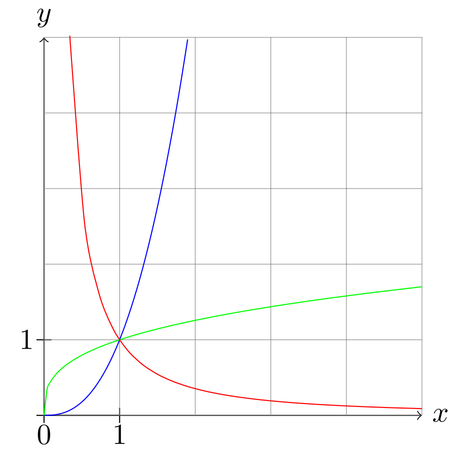

FIGURE 3.9 – Graphe de la fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ pour $\alpha = -1,5 < 0$ (rouge), $\alpha = \frac{1}{3} \in]0;1[$ (vert) et $\alpha = 2,5 > 1$ (bleu).

En posant $X = x + \frac{b}{2a}$, cette dernière équation est équivalente à $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Si $\Delta < 0$, il est clair que cette équation n'admet pas de solution puisque le carré d'un nombre réel est toujours positif. Ceci prouve le point 3..

Si $\Delta = 0$, l'équation $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ admet pour unique solution $X = 0$ ce qui est équivalent à $x = \frac{-b}{2a}$. Ceci prouve le point 2..

Si $\Delta > 0$, l'équation $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ admet pour solutions $X_1 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. En utilisant que le changement de variable $X = x + \frac{b}{2a}$ est équivalent à $x = X - \frac{-b}{2a}$, on obtient que l'équation $ax^2 + bx + c$ admet pour solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Ceci prouve le point 1.. □

Preuve de la Proposition 3.4 : Pour montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, il suffit de voir que si $0 < x < y$ alors $\ln(x) < \ln(y)$. Or puisque la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, pour $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, on a :

$$\ln(x) < \ln(y) \iff \exp(\ln(x)) < \exp(\ln(y)) \iff x < y.$$

Ceci prouve le point 1..

On a :

$$\begin{aligned} z = \ln(x) + \ln(y) &\iff \exp(z) = \exp(\ln(x) + \ln(y)) \\ &\iff \exp(z) = \exp(\ln(x))\exp(\ln(y)) = xy \\ &\iff z = \ln(xy). \end{aligned}$$

Ceci prouve le point 2. ; la preuve du point 3. est similaire. Passons à la preuve du point 4.. On a :

$$\begin{aligned} z = p\ln(x) &\iff \exp(z) = \exp(p\ln(x)) \\ &\iff \exp(z) = \exp(\ln(x))^p = x^p \\ &\iff z = \ln(x^p). \end{aligned}$$

□