IUT de Dijon-Auxerre
BUT GEA 1re année
Semestre 1
Année universitaire 2024-2025

R1.10 Finance

Notes et compléments de cours

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr

Préambule

Objectifs, contenus et structure :

L'unique chapitre de cette ressource est une introduction aux mathématiques financières. Après la présentation d'une notion sous-jacente à cette thématique – les suites–, on s'intéressera aux différents modes de calculs d'intérêt, aux placements financiers et aux emprunts. Ces concepts seront également présents dans les cours de comptabilité.

Évaluations : À préciser.

Avertissement :

Ces notes et compléments de cours ayant été fraîchement rédigés, quelques coquilles peuvent encore y figurer. Le fait de les signaler par courriel sera apprécié.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux Mathématiques financières

Dans ce chapitre, on s'intéresse à quelques notions de mathématiques financières, notamment les *intérêts*, la *capitalisation*, l'*actualisation* et les *emprunts*. Les outils mathématiques nécessaires à la compréhension des mécanismes financiers reposent principalement sur la notion de suite, en particulier, de suites arithmétiques et géométriques. La première partie de ce chapitre est donc consacré à la présentation de ces prérequis.

1.1 Prérequis : les suites

Définition 1.1. *On appelle* suite *de nombres réels toute famille infinie d'éléments de* $\mathbf{R}$*, appelés* termes*, indexée par* $\mathbf{N}$*. On note classiquement une suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$*.*

Définition 1.2. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est* croissante *(resp.* strictement croissante, décroissante, strictement décroissante*) si, pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* $u_{n+1} \geq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} > u_n$*,* $u_{n+1} \leq u_n$*,* $u_{n+1} < u_n$*).*

Il est parfois pratique d'étudier la différence ou le quotient (quand ceci est possible) de deux termes consécutifs d'une suite pour obtenir son sens de variation. La proposition suivante s'obtient par des calculs immédiats.

Proposition 1.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite.*

1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si, et seulement si, pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* $u_{n+1} - u_n \geq 0$ *(resp.* $u_{n+1} - u_n > 0$*,* $u_{n+1} - u_n \leq 0$*,* $u_{n+1} - u_n < 0$*).*
2. *Supposons que tous les termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *soient strictement positifs. Alors, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si, et seulement si, pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *(resp.* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$*,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$*,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$*).*

Certaines suites peuvent être définies par une *relation récursive* permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs terme(s) précédent(s) de la suite.

Définition 1.3. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est* récurrente d'ordre p *si ses* p *premiers termes* $u_0, \ldots, u_{p-1}$ *sont donnés et pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* u_{n+p} *s'exprime en fonction de* $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$*.*

En d'autres termes, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est récurrente d'ordre* p *s'il existe une fonction* f *de* p *variables telle que :*

$$\begin{cases} u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}) \\ u_0, \dots, u_{p-1} \text{ donnés} \end{cases}.$$

Remarque 1.1. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_{n+p} = \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \cdots + \alpha_p u_{n+p-1}) \\ u_0, \dots, u_{p-1} \text{ donnés} \end{cases},$$

on parle de suite récurrente *linéaire* d'ordre p.

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_{n+p} = \alpha_0 + \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \cdots + \alpha_p u_{n+p-1}) \\ u_0, \dots, u_{p-1} \text{ donnés} \end{cases},$$

on parle de suite récurrente *affine* d'ordre p.

Exemple 1.1. La *suite de Fibonacci* est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}.$$

1.1.1 Suites arithmétiques

Définition 1.4. *On appelle* suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 *la suite (récurrente affine d'ordre 1) définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}.$$

Remarque 1.2. Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors sa raison r. Il s'ensuit qu'une suite arithmétique est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

La proposition suivante donne l'expression du terme général d'une suite arithmétique.

Proposition 1.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$*, on a :*

$$u_n = u_0 + nr. \tag{1.1.1}$$

Remarque 1.3. En fait, une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si, son terme général est donné par (1.1.1).

Corollaire 1.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0.

Pour tous $n, k \in \mathbf{N}$*, on a :*

$$u_{n+k} = u_n + kr.$$

Preuve : D'après la Proposition 1.2, on a :

$$u_{n+k} = u_0 + (n+k)r = u_0 + nr + kr = u_n + kr.$$

□

Corollaire 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison $r \neq 0$ et de premier terme u_0. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.*

Preuve : D'après la Proposition 1.2, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (u_0 + nr) = u_0 + r \lim_{n\to+\infty} n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}.$$

□

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite arithmétique

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite arithmétique dont on ne connaît ni le premier terme ni la raison mais que l'on connaisse deux termes de cette suite $u_k = a$ et $u_n = b$. Pour déterminer sa raison r et son premier terme u_0, il suffit d'utiliser la Proposition 1.2 pour obtenir que r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + kr = u_k = a \\ u_0 + nr = u_n = b \end{cases}.$$

On résout ensuite ce système en u_0 et r.

Remarque 1.4.

1. Si u_0 ou r est connu, il n'y a qu'une équation à considérer.
2. Alternativement, on peut déterminer la raison r de la suite en calculant de deux façons différentes le reste de la différence $u_n - u_k$ (qui vaut $(n-k)r$ puis déduire la valeur de u_0 en utilisant que $u_n = u_0 + nr$ donc $u_0 = u_n - nr$. De cette méthode, on peut extraire une méthode pour déterminer la raison d'une suite arithmétique à partir de deux de ses termes et une méthode pour déterminer le terme initial d'une suite arithmétique à partir de sa raison et un de ses termes.

Exemple 1.2. Déterminons la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 9$ et $u_7 = 17$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, la Proposition 1.2 assure que $9 = u_3 = u_0 + 3r$ et $17 = u_7 = u_0 + 7r$. Ainsi, r et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 7r = 17 \end{cases}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} u_0 & +3r & = 9 \\ u_0 & +7r & = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 3r & = 9 \\ 4r & = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_0 = 9 - 3r = 9 - 3\times 2 = 3 \\ r = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Sommes partielles

Définition 1.5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite.*

On appelle somme partielle d'ordre n *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la somme :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_{n-1}.$$

Proposition 1.3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0*.*

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n\,(u_0 + u_{n-1})}{2}.$$

Remarque 1.5. Pour éviter toute erreur, il est conseillé de se souvenir de la formule précédente comme suit :

$$S_n = \frac{\text{« nombre de termes »} \;\times \text{« premier terme + dernier terme »}}{2}.$$

On peut alors écrire des formules analogues pour d'autres sommes partielles de termes consécutifs d'une suite arithmétique (par nécéssairement les n premiers termes), comme dans la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0*.*

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n\,(u_0 + u_{n-1})}{2},$$

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2},$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\,(u_0 + u_n)}{2},$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \cdots + u_{n-1} = \frac{(n-1)\,(u_1 + u_{n-1})}{2}.$$

Exemple 1.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Alors,

$$\overline{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(1+1+2n)}{2} = (n+1)^2.$$

Exercice 1.1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme des entiers compris entre 1 et n.

1.1.2 Suites géométriques

Définition 1.6. *On appelle* suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 *la suite (récurrente linéaire d'ordre 1) définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}.$$

Remarque 1.6.

1. Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de vérifier que le quotient de deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante est alors sa raison q.
2. Les suites géométriques joueront un rôle important en *mathématiques financières*.

Proposition 1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

1. *Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante (resp. strictement croissante).*
2. *Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*
3. *Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.*
4. *Si $q = 0$ et $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est (resp. croissante) ; elle est en fait constante égale à 0 à partir du rang 1.*

Preuve : Exercice ! □

Remarque 1.7. Si $q < 0$, chaque terme est du signe opposé à celui de son prédécesseur ; la suite est alors oscillante.

La proposition suivante donne l'expression du terme général d'une suite géométrique.

Proposition 1.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_n = q^n u_0. \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.8. En fait, une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si, son terme général est donné par (1.1.2).

Corollaire 1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*
Pour tous $n, k \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+k} = q^k u_n.$$

Preuve : D'après la Proposition 1.6, on a :

$$u_{n+k} = q^{n+k} u_0 = q^k q^n u_0 = q^k u_n.$$

□

Corollaire 1.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

1. *Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite.*
2. *Si $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.*
3. *Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u_0.*
4. *Si $q > 1$, la suite diverge vers $\mathrm{sgn}(u_0)\infty$.*

Preuve : Exercice ! □

Méthode pour déterminer la raison et le terme initial d'une suite géométrique

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite géométrique dont on ne connait ni le premier terme ni la raison mais que l'on connaisse deux termes de cette suite $u_k = a$ et $u_n = b$. Pour déterminer sa raison q et son premier terme u_0, il suffit d'utiliser la Proposition 1.6 pour obtenir que q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^k u_0 = u_k = a \\ q^n u_0 = u_n = b \end{cases}.$$

On résout ensuite ce système en u_0 et q.

Remarque 1.9.

1. Si k et n ont la même parité, la solution n'est pas unique.
2. Alternativement, on peut déterminer la raison q de la suite en calculant de deux façons différentes le quotient $\frac{u_n}{u_k}$ (qui vaut q^{n-k} puis déduire la valeur de u_0 en utilisant que $u_n = u_0 q^n$ donc $u_0 = \frac{u_n}{q^n}$. De cette méthode, on peut extraire une méthode pour déterminer la raison d'une suite géométrique à partir de deux de ses termes et une méthode pour déterminer le terme initial d'une suite géométrique à partir de sa raison et un de ses termes.

Exemple 1.4. Déterminons la raison q et le premier terme u_0 de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_3 = 80$ et $u_6 = 640$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0, la Proposition 1.6 assure que $80 = u_3 = q^3 u_0$ et $640 = u_6 = q^6 u_0$. Ainsi, q et u_0 satisfont le système :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^6 u_0 = 640 \end{cases} \iff \begin{cases} q^3 u_0 = 80 \\ q^3 = \frac{q^6 u_0}{q^3 u_0} = \frac{640}{80} = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_0 = \frac{80}{q^3} = \frac{80}{2^3} = 10 \\ q = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 10$.

Méthode pour déterminer à partir de quel rang une suite géométrique dépasse une valeur prescrite

Soit $A > 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$. Pour déterminer à partir de quel rang N la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dépasse A, il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned}
u_n \geq A &\iff q^n u_0 \geq A && \text{(d'après la Proposition 1.6)}\\
&\iff q^n \geq \frac{A}{u_0} && \text{(car } u_0 > 0\text{)}\\
&\iff \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{u_0}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)}\\
&\iff n\ln(q) \geq \ln(A) - \ln(u_0) && \text{(par les propriétés de } \ln\text{)}\\
&\iff n \geq \frac{\ln(A) - \ln(u_0)}{\ln(q)} && \text{(car } q > 1 \text{ et donc } \ln(q) > 0\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, le choix de N comme le plus petit entier supérieur à $\frac{\ln(A)-\ln(u_0)}{\ln(q)}$ convient.

Remarque 1.10. La même méthode permet de déterminer, pour $\varepsilon > 0$, à partir de quel rang N une suite géométrique de raison $q \in]-1;1[$ à ses termes compris entre $-\varepsilon$ et ε.

Exemple 1.5. Déterminons à partir de quel rang N la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de raison $q = 7$ et de premier terme $u_0 = 5$ dépasse 1000000. On a :

$$\begin{aligned}
u_n \geq 1000000 &\iff u_0 q^n = 5 \times 7^n \geq 1000000 && \text{(d'après la Proposition 1.6)}\\
&\iff 7^n \geq \frac{1000000}{5} = 200000 && \\
&\iff \ln(7^n) \geq \ln(200000) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est croissante)}\\
&\iff n\ln(7) \geq \ln(200000) && \text{(par les propriétés de } \ln\text{)}\\
&\iff n \geq \frac{\ln(200000)}{\ln(7)} \simeq 6,3 &&
\end{aligned}$$

Ainsi, le choix de $N = 7$ convient.

Sommes partielles

Proposition 1.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + \ldots u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Remarque 1.11. Pour éviter toute erreur, il est conseillé de se souvenir de la formule précédente comme suit :

$$S_n = \text{« premier terme »} \; \frac{1 - \text{« raison puissance nombre de termes »}}{1 - \text{« raison »}}.$$

On peut alors écrire des formules analogues pour d'autres sommes partielles de termes consécutifs d'une suite géométrique (par nécéssairement les n premiers termes), comme dans la proposition suivante.

Proposition 1.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*
Alors, on a :

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad n \geq 1$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad n \geq 0$$

$$\check{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_1 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, \qquad n \geq 2.$$

Corollaire 1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q \in]-1;1[$ et de premier terme u_0.*
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$S_\infty = \lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Preuve : Puisque $|q| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. On en déduit le résultat à l'aide de la Proposition 1.7. □

Exemple 1.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} = 4 - \frac{1}{4^n}$$

et

$$S_\infty = \lim_{n\to+\ infty} S_n = 4.$$

1.2 Intérêts, capitalisation et actualisation

Les *intérêts* d'un placement ou d'un prêt forment la rémunération de celui-ci. Leur calcul dépend du *taux de rémunération*, de la durée, du capital investi et du fait que l'on considère un placement à intérêts *simples* ou *composés*.

Notations 1.1. *On notera :*
- *C_0 le capital investi initialement,*
- *τ le taux du placement ou du prêt,*
- *n le nombre de périodes,*
- *I_n les intérêts de la n^e période,*
- *$V_n = V_{n-1} + I_n$ la valeur acquise au terme de la n^e période avec $V_0 = C_0$ le capital investi initialement.*

1.2.1 Intérêts simples

Définition 1.7. *On dit qu'un capital C_0 est placé à* intérêts simples *et au* taux τ *par période si les intérêts de chaque période sont donnés par :*

$$I = C_0\tau.$$

La valeur acquise *au bout de n périodes par le placement d'un capital C_0 à intérêts simples, au taux τ est alors :*

$$V_n = C_0 + nI.$$

Remarque 1.12.

1. On reconnait ici que, dans le cas d'un seul versement, la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des valeurs acquises est la suite arithmétique de premier terme C_0 et de raison $I = C_0\tau$. Ceci permet de déduire facilement le capital investi, la valeur acquise, le taux ou le nombre de périodes d'un placement à partir des trois autres paramètres. On peut également profiter de ce fait pour déterminer le temps nécessaire à l'obtention d'une valeur acquise prescrite connaissant le taux et le capital investi ou encore le montant du capital à investir pour obtenir une valeur acquise prescrite connaissant le taux et la durée souhaitée.
2. Les intérêts ne portent, dans ce cas, que sur le capital investi.
3. Dans la pratique, les intérêts simples ne sont que rarement utilisés. Ils le sont généralement pour des placement à court terme (moins d'un an).
4. Il est d'usage de considérer qu'un mois comporte 30 jours et donc une année 360 jours répartis en 25 quinzaines (de 14,4 jours) ou 50 semaines. Les jours sont comptés de manière exacte, en jours pleins. Sur les livrets usuels les intérêts sont calculés par quinzaine.

Exemple 1.7. Si l'on place 500€ à intérêts simples au taux annuel de $0,75\%$, les intérêts de chaque période s'élèveront à $I = 3,75$€. Après 20 années, le capital acquis sera $V_{20} = C_0 + 20I = 500 + 20 \times 3,75 = 575$€.

Exemple 1.8. Si 20000€ placés à intérêts simples ont permis d'obtenir une valeur acquise de 20400€ au bout de 8 mois, la relation $V_n = C_0 + nI$ entraine que les intérêts de chaque période s'élèvent à $I = \frac{1}{n}(V_n - C_0) = \frac{1}{8}(20400 - 20000) = 50$€. On en déduit que le taux mensuel du placement est de $\tau = \frac{I}{C_0} = \frac{50}{20000} = 0,25\%$.

Exemple 1.9. On place 1000€ sur un livret à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 7%. Déterminons dans combien d'années au minimum, on aura atteint une valeur acquise de 1500€. On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 1500.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 1500 &\iff C_0 + nI = C_0 + nC_0\tau \geq 1500 \\ &\iff 1000 + n \times 1000 \times 0,07 \geq 1500 \\ &\iff 70n \geq 500 \\ &\iff n \geq \frac{500}{70} \simeq 7,1. \end{aligned}$$

Il faudra attendre au moins 8 ans pour une valeur acquise supérieure ou égale à 1500€.

Exercice 1.2. Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%. Déterminer le capital à investir pour obtenir, au bout de 5 ans, une valeur acquise de 12000€.

1.2.2 Intérêts composés

Définition 1.8. *On dit qu'un capital C_0 est placé à* intérêts composés *et au* taux τ *par période si les intérêts de la n^e période sont calculés à partir de la* valeur acquise V_{n-1} *au début de cette période par la formule :*

$$I_n = V_{n-1}\tau.$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$V_{n+1} = V_n + I_{n+1} = V_n + \tau V_n = (1+\tau)\,V_n,$$

avec $V_0 = C_0$. Ainsi, la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des valeurs acquises est la suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1+\tau$ ce qui prouve la proposition suivante.

Proposition 1.9. *Si un capital C_0 est placé à* intérêts composés *et au* taux τ *par période la valeur acquise V_n au terme de la n^e période est donnée par :*

$$V_n = C_0\,(1+\tau)^n\,.$$

Remarque 1.13.

1. On a vu que, dans le cas d'un seul versement, la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des valeurs acquises est la suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1+\tau$. Ceci permet de déduire facilement le capital investi, la valeur acquise, le taux ou le nombre de périodes d'un placement à partir des trois autres paramètres. On peut également profiter de ce fait pour déterminer le temps nécessaire à l'obtention d'une valeur acquise prescrite connaissant le taux et le capital investi ou encore le montant du capital à investir pour obtenir une valeur acquise prescrite connaissant le taux et la durée souhaitée.
2. Les intérêts d'une période portent ici sur la valeur acquise au début de la période.
3. Les placement à intérêts composés sont les plus fréquents. Lorsqu'il n'est pas précisé si un placement est rémunéré par des intérêts simples ou composés, on considère par défaut qu'il s'agit d'intérêts composés.

Exemple 1.10. Si l'on place 200€ à intérêts composés au taux annuel de $1,25\%$, la valeur acquise après 10 année sera $V_{10} = C_0(1+\tau)^{10} = 200 \times 1,0125^{10} \simeq 226,45$€. Le montant total des intérêts perçus en 10 ans s'élève donc à $226,45 - 200 = 26,45$€.

Exemple 1.11. Si 3000€ placés à intérêts composés ont permis d'obtenir une valeur acquise de 4000€ au bout de 20 ans, la relation $V_n = C_0(1+\tau)^n$ permet de déterminer le taux annuel du placement comme suit. On a :

$$\begin{aligned} V_{20} = 4000 &\Longleftrightarrow C_0 \left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\Longleftrightarrow 3000 \left(1+\tau\right)^{20} = 4000 \\ &\Longleftrightarrow \left(1+\tau\right)^{20} = \frac{4}{3} \\ &\Longleftrightarrow 1+\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} \\ &\Longleftrightarrow \tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le taux annuel du placement est de $\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 = 1,45\%$.

Exemple 1.12. Un produit financier est actuellement rémunéré au taux annuel de $0,75\%$. Déterminons combien d'années sont nécessaires avant de doubler un capital placé si aucun autre versement n'est fait. On veut trouver n tel que :

$$V_n \geq 2C_0.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} V_n \geq 2C_0 &\Longleftrightarrow C_0 \times 1,0075^n \geq 2C_0 \\ &\Longleftrightarrow 1,0075^n \geq 2 \\ &\Longleftrightarrow n \ln(1,0075) = \ln\left(1,0075^n\right) \geq \ln(2) \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,0075)} \simeq 92,77 \end{aligned}$$

Il faudra être patient et attendre au moins 93 ans pour doubler la mise !

Exercice 1.3. Considérons un placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de 4%. Déterminer le capital à investir pour obtenir, au bout de 3 ans, une valeur acquise de 100000€.

Les intérêts considérés ci-dessous sont simples ou composés et les taux effectifs.

1.2.3 Capitalisation

Définition 1.9. *La* capitalisation *est le calcul d'une somme future à partir d'une valeur actuelle. En d'autre terme, il s'agit du procédé permettant de passer d'un capital investi C_0 à la valeur acquise V_n à partir de ce capital à l'issue de n périodes.*

Remarque 1.14. Nous avons vu, dans la Sous-section 1.2.1, que V_n s'obtient, dans le cas d'intérêts simples au taux τ par période, grâce à la formule :

$$V_n = C_0 + nI = C_0 + nC_0\tau.$$

Dans la Sous-section 1.2.2, nous avons vu que V_n s'obtient, dans le cas d'intérêts composé au taux τ par période, grâce à la formule :

$$V_n = C_0 \left(1+\tau\right)^n.$$

1.2.4 Actualisation

Définition 1.10. *L'*actualisation *est le calcul d'une somme présente à partir d'une valeur future. En d'autre terme, il s'agit du procédé permettant de passer de la valeur acquise V_n à partir d'un capital investi C_0 à l'issue de n périodes au capital investi C_0 lui même. On appelle $V_0 = C_0$ la* valeur actuelle *de la valeur future V_n.*

Remarque 1.15. Il s'agit exactement de faire ce qui a été demandé dans les Exercices 1.2 et 1.3 !

Si les intérêts considérés sont **simples** au taux τ par période, V_n s'obtient grâce à la formule :

$$V_n = V_0 + nV_0\tau = V_0\left(1 + n\tau\right).$$

On en déduit que dans ce cas, la valeur actuelle de V_n est donnée, dans ce cas, par :

$$V_0 = \frac{V_n}{1 + n\tau}.$$

Si les intérêts considérés sont **composés** au taux τ par période, V_n s'obtient grâce à la formule :

$$V_n = V_0\left(1 + \tau\right)^n.$$

On en déduit que dans ce cas, la valeur actuelle de V_n est donnée, dans ce cas, par :

$$V_0 = V_n\left(1 + \tau\right)^{-n}.$$

Exemple 1.13. [Solution de l'Exercice 1.2] Considérons un placement à intérêts simples rémunéré au taux annuel de 3%. Déterminer le capital à investir pour obtenir, au bout de 5 ans, une valeur acquise de 12000€ revient à trouver V_0 tel que $V_5 = 12000$€. Puisque les intérêts considérés sont simples, on écrit successivement que :

$$\begin{aligned} V_5 = 12000 &\Longleftrightarrow V_0 + 5V_0\tau = 12000 \\ &\Longleftrightarrow V_0(1 + 5\tau) = V_0 \times 1,15 = 12000 \\ &\Longleftrightarrow V_0 = \frac{12000}{1,15} \simeq 10434,78. \end{aligned}$$

Pour ce placement, la valeur actuelle de la somme future de 12000€ dans 5 ans est 10434,78€.

Exemple 1.14. [Solution de l'Exercice 1.3] Considérons un placement à intérêts composés rémunéré au taux annuel de 4%. Déterminer le capital à investir pour obtenir, au bout de 3 ans, une valeur acquise de 100000€ revient à trouver V_0 tel que $V_3 = 100000$€. Puisque les intérêts considérés sont simples, on écrit successivement que :

$$\begin{aligned} V_3 = 100000 &\Longleftrightarrow V_0\left(1 + \tau\right)^3 = 100000 \\ &\Longleftrightarrow V_0 = 100000\left(1 + \tau\right)^{-3} = 100000 \times 1,04^{-3} \simeq 88899,66. \end{aligned}$$

Pour ce placement, la valeur actuelle de la somme future de 100000€ dans 3 ans est 88899,66€.

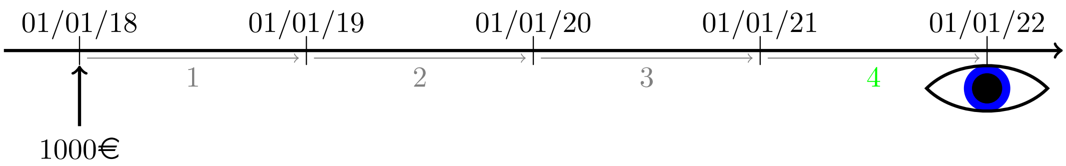
Un schéma intuitif pour éviter les erreurs de compte de périodes

Pour calculer la valeur actuelle ou capitalisée, on peut utiliser un schéma contenant :
- un axe horizontal représentant le temps et les périodes,
- une ou plusieurs flèches représentant le(s) versement(s) ou retrait(s) selon le sens de la flèche,
- les montants versés ou retirés,
- et un œil indiquant l'instant auquel on « regarde » la valeur des sommes versées et retirées.

On sera attentif au sens dans lequel on parcourt les périodes en allant de la (ou des) flèche(s) vers l'œil (puisqu'il influe sur le signe de l'exposant ou du multiplicande). Bien qu'ils soient utilisables quelque soit le type d'intérêt considéré (simple ou composé), on donne ci-dessous quelques exemples dans le cas d'intérêts composés d'usage plus courant. Il faut, bien entendu, être vigilant à adapter les formules au type d'intérêts utilisé.

Exemple 1.15. On a placé 1000 euros le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 3%. Quelle sera la valeur capitalisée de cette somme le 01/01/2022 ?

Le schéma prend la forme suivante.

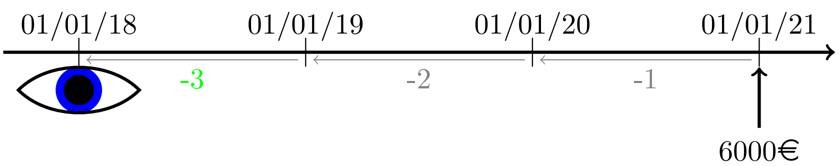


Ainsi, la valeur capitalisée au 01/01/2022 est :

$$1000 \times (1+\tau)^{4} = 1000 \times 1,03^4 \simeq 1125,51€.$$

Exemple 1.16. On a placé une somme le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 2%. Sachant qu'il n'y a pas eu d'autre retrait ou versement et qu'il y avait 6000€ sur le livret le 01/01/21, quelle somme a été placée le 01/01/2018 ?

Le schéma prend la forme suivante.

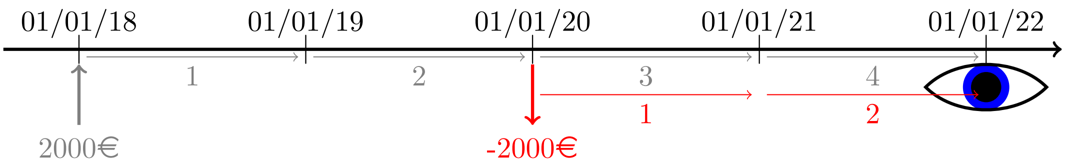


Ainsi, la valeur de la somme placée est la valeur actualisée au 01/01/2018 :

$$6000 \times 1,02^{-3} \simeq 5653,93€.$$

Exemple 1.17. On a placé 2000 euros le 01/01/2018 sur un livret rémunéré au taux composé annuel τ de 1% puis retiré 2000 euros le 01/01/2020. S'il n'y a pas d'autre versement ou retrait, de combien disposera-t-on le 01/01/2022 ?

Le schéma prend la forme suivante.



Ainsi, la somme dont on disposera au 01/01/2022 est :

$$2000 \times 1,01^4 + (-2000) \times 1,01^2 \simeq 41,01€.$$

1.3 Versements périodiques : les annuités

Les placements et emprunts à intérêts simples n'étant utilisés que très marginalement, dans toute la suite nous nous restreindrons aux cas des placements ou emprunts à intérêts composés. Les méthodes, concepts et notions présentés ci-dessous peuvent toute fois être transposés dans le cadre d'intérêts simples.

Un placement ou un prêt est rarement effectué en une seule opération. Des versements peuvent être effectués à intervalle de temps réguliers (mois, années, ...). Ceci nous conduit à la notion d'*annuité*.

Définition 1.11. *Des* annuités *sont une suite (finie) de flux financier réalisés à intervalle de temps réguliers.*

Remarque 1.16. Les annuités dépendent de la date de premier flux, de la période, du nombre de flux et de leurs montants. Le fait qu'elles soient versées en début ou fin de période joue également un rôle important. Un versement correspond à une annuité positive, un retrait à une annuité négative ; certaines annuités peuvent être nulles.

Notation 1.2. *On note généralement les annuités* $a_1, a_2, \dots$.

1.3.1 Annuités de début de période

On parle d'annuités de *début de période* lorsque les flux monétaires ont lieu au début de chaque période : a_1 est versée au début de la première période, a_2 au début de la deuxième période, ... Dans ce cas a_k, compte dans le calcul des intérêts de la k^{e} période.

Calcul de la valeur acquise

Pour déterminer la valeur acquise, à l'issue de n périodes, par le versement d'annuités $a_1, \dots, a_n$ en début de période au taux τ par période, on peut dresser un tableau faisant apparaître montant des annuités et valeur capitalisée de chacune au terme du placement. Un tel tableau prend la forme suivante.

n° de la période	1	...	k	...	n
Annuité a_i	a_1	...	a_k	...	a_n
Valeur capitalisée grâce à a_i	$a_1\,(1+\tau)^n$	...	$a_k\,(1+\tau)^{n+1-k}$	...	$a_n\,(1+\tau)$

Pour obtenir la dernière ligne de ce tableau, on a utilisé que a_1 est placée durant n périodes (à intérêts composés) et donc produira une valeur de $a_1(1+\tau)^n$ au terme du placement. De même, a_2 est placé durant $n-1$ périodes et produira une valeur capitalisée de $a_2(1+\tau)^{n-1}$ au terme du placement. Plus généralement, a_k est placé durant $n+1-k$ périodes et produira une valeur capitalisée de $a_k(1+\tau)^{n+1-k}$ au terme du placement.

La *valeur acquise* par la suite d'annuités $a_1, \ldots, a_k$ s'obtient simplement en sommant les valeur capitalisées correspondant à chacun des versements. Nous venons donc de voir que :

Proposition 1.10. *La* valeur acquise*, à l'issue de n périodes, par le versement d'annuités $a_1, \ldots, a_n$ en début de période au taux τ par période est donnée par :*

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+\tau)^{n+1-k} = a_1(1+\tau)^n + a_2(1+\tau)^{n-1} + \cdots + a_n(1+\tau).$$

Exemple 1.18. Une personne ouvre un PEL rémunéré au taux de $0,5\%$ mensuel et y place 1000€ lors de l'ouverture puis 50€ par mois. À la fin de la première année, il disposera de :

$$\begin{aligned} V_n &= 1000 \times 1,005^{12} + 50 \times 1,005^{11} + 50 \times 1,005^{10} + \cdots + 50 \times 1,005 \\ &= 1000 \times 1,005^{12} + 50 \sum_{k=1}^{11} 1,005^k \\ &= 1000 \times 1,005^{12} + 50 \times 1,005 \times \frac{1,005^{11}-1}{0,005} \\ &= 1628,46€. \end{aligned}$$

Elle aura donc versé $1000 + 50 \times 11 = 1550$€ et reçu $1628,46 - 1550 = 78,46$€ d'intérêts.

Calcul de la valeur actuelle

Pour déterminer la valeur actuelle du versement d'annuités $a_1, \ldots, a_n$ en début de période au taux τ par période, on peut dresser un tableau faisant apparaître montant des annuités et valeur actualisée de chacune au terme du placement. Un tel tableau prend la forme suivante.

n° de la période	1	...	k	...	n
Annuité a_i	a_1	...	a_k	...	a_n
Valeur actualisée a_i	a_1	...	$a_k(1+\tau)^{-k+1}$	...	$a_n(1+\tau)^{-n+1}$

Pour obtenir la dernière ligne de ce tableau, on a utilisé que la valeur actuelle de a_1 placée tout de suite est simplement a_1. De même, la valeur actuelle de a_2, placée au début de la deuxième période est, $a_2(1+\tau)^{-1}$. Plus généralement, la valeur actuelle de a_k, au début de la k^{e} période, est $a_k(1+\tau)^{1-k}$.

La *valeur actuelle* de la suite d'annuités $a_1, \ldots, a_k$ s'obtient simplement en sommant les valeur actuelles correspondant à chacun des versements. Nous venons donc de voir que :

Proposition 1.11. *La* valeur actuelle *des annuités $a_1, \ldots, a_n$ versées en début de période au taux τ par période est donné par :*

$$V_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k(1+\tau)^{1-k} = a_1 + a_2(1+\tau)^{-1} + \cdots + a_n(1+\tau)^{1-n}.$$

Remarque 1.17. En pratique, le calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités permet de déterminer le montant (actuel) que permet de rembourser cette suite d'annuités, autrement dit le montant que l'on peut emprunter si l'on est prêt à rembourser a_1 durant la première période, a_2 durant la deuxième période, ... Il est rare de devoir rembourser dès le premier jour d'un prêt et on considère plutôt des annuités de fin de période dans ce cadre.

Exemple 1.19. Une personne emprunte au taux de 2% sur 3 mois. Elle est prête à verser 100€ au début du premier mois, 150€ au début du deuxième mois et 120€ au début du troisième mois. La valeur actuelle de cette suite d'annuités est :

$$V_0 = 100 + 150 \times 1,02^{-1} + 120 \times 1,02^{-2} \simeq 362,40€.$$

Elle peut donc emprunter 362,40€ et paiera $100 + 150 + 120 - 362,40 = 7,60€$ d'intérêts.

1.3.2 Annuités de fin de période

On parle d'annuités de *fin de période* lorsque les flux monétaires ont lieu à la fin de chaque période : a_1 est versé à la fin de la première période, a_2 à la fin de la deuxième période, ... Dans ce cas a_k, ne compte pas dans le calcul des intérêts de la k^{e} période mais dans celui des intérêts de la $(k+1)^{\text{e}}$ période.

Calcul de la valeur acquise

Pour déterminer la valeur acquise, à l'issue de n périodes, par le versement d'annuités $a_1, \ldots, a_n$ en fin de période au taux τ par période, on peut, comme ci-dessus, dresser un tableau faisant apparaître montant des annuités et valeur capitalisée de chacune au terme du placement. Un tel tableau prend la forme suivante.

n° de la période	1	...	k	...	n
Annuité a_i	a_1	...	a_k	...	a_n
Valeur capitalisée grâce à a_i	$a_1 (1+\tau)^{n-1}$	...	$a_k (1+\tau)^{n-k}$	...	a_n

Pour obtenir la dernière ligne de ce tableau, on a utilisé que a_1 est placée durant $n-1$ périodes complètes (à intérêts composés) et donc produira une valeur de $a_1 (1+\tau)^{n-1}$ au terme du placement. De même, a_2 est placée durant $n-2$ périodes et produira une valeur capitalisée de $a_2 (1+\tau)^{n-2}$ au terme du placement. Plus généralement, a_k est placée durant $n-k$ périodes et produira une valeur capitalisée de $a_k (1+\tau)^{n-k}$ au terme du placement.

La *valeur acquise* par la suite d'annuités $a_1, \ldots, a_k$ s'obtient simplement en sommant les valeur capitalisées correspondant à chacun des versements. Nous venons donc de voir que :

Proposition 1.12. *La* valeur acquise*, à l'issue de n périodes, par le versement d'annuités $a_1, \ldots, a_n$ en fin de période au taux τ par période est donnée par :*

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+\tau)^{n-k} = a_1 (1+\tau)^{n-1} + a_2 (1+\tau)^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Exercice 1.4. Reprendre l'Exemple 1.18 en considérant des versements en fin de période et non en début de période.

Calcul de la valeur actuelle

Pour déterminer la valeur actuelle du versement d'annuités $a_1, \ldots, a_n$ en fin de période au taux τ par période, on peut dresser, comme précédemment, un tableau faisant apparaître montant des annuités et valeur actualisée de chacune au terme du placement. Un tel tableau prend la forme suivante.

n° de la période	1	...	k	...	n
Annuité a_i	a_1	...	a_k	...	a_n
Valeur actualisée a_i	$a_1 (1+\tau)^{-1}$	...	$a_k (1+\tau)^{-k}$	...	$a_n (1+\tau)^{-n}$

Pour obtenir la dernière ligne de ce tableau, on a utilisé que la valeur actuelle de a_1 placée à la fin de la première période est simplement $a_1 (1+\tau)^{-1}$. De même, la valeur actuelle de a_2, placée à la fin de la deuxième période est, $a_2 (1+\tau)^{-2}$. Plus généralement, la valeur actuelle de a_k, à la fin de la k^{e} période, est $a_k (1+\tau)^{-k}$.

La *valeur actuelle* de la suite d'annuités $a_1, \ldots, a_k$ s'obtient simplement en sommant les valeur actuelles correspondant à chacun des versements. Nous venons donc de voir que :

Proposition 1.13. *La* valeur actuelle *des annuités $a_1, \ldots, a_n$ versées en fin de période au taux τ par période est donnée par :*

$$V_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+\tau)^{-k} = a_1 (1+\tau)^{-1} + a_2 (1+\tau)^{-2} + \cdots + a_n (1+\tau)^{-n}.$$

Exercice 1.5. Reprendre l'Exemple 1.19 en considérant des versements en fin de période et non en début de période.

1.3.3 Cas des annuités constantes

On parle d'*annuités constantes* lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pour une certaine constante a. Les valeurs acquises et actuelles se réécrivent plus simplement dans ce cas.

Proposition 1.14.

1. *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux τ est donnée par :*

$$V_n = a (1+\tau) \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

2. *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en début de période, au taux τ est donnée par :*

$$V_0 = a (1+\tau) \frac{1 - (1+\tau)^{-n}}{\tau}.$$

3. *La valeur acquise par le versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux τ est donnée par :*

$$V_n = a \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

4. *La valeur actuelle du versement de n annuités constantes égales à a en fin de période, au taux τ est donnée par :*

$$V_0 = a \frac{1 - (1+\tau)^{-n}}{\tau}.$$

1.4 Emprunts *indivis*

On considère dans cette section des annuités de fin de période et des intérêts composés. Les taux sont effectifs.

Définition 1.12. *Un* emprunt indivis *est un emprunt que souscrit un emprunteur auprès d'un et un seul prêteur. Il fait l'objet d'un contrat engageant l'emprunteur à verser n annuités $a_1, \ldots, a_n$ au prêteur pour rembourser le capital C prêté lors de la souscription ainsi que les intérêts calculés au taux τ fixé dans le contrat.*

Chaque annuité a_k se décompose en :

— *un* amortissement*, noté m_k, servant à rembourser le capital emprunté*

— *un paiement des intérêts de la période $I_k = C_{k-1}\tau$, où C_{k-1} désigne le capital restant dû au début de la période durant laquelle a lieu le versement de la k^{e} annuité.*

On présente ces données sous la forme d'un *tableau d'amortissement* :

Période n°	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	C_0	$I_1 = C_0\tau$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1\tau$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
k	$C_{k-1} = C_{k-2} - m_{k-1}$	$I_k = C_{k-1}\tau$	m_k	$a_k = I_k + m_k$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1}\tau$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Remarque 1.18. Le remboursement de certains emprunts ne débute qu'après une période fixée à l'avance, c'est par exemple le cas pour la plupart des prêts étudiants. Il convient alors de calculer la valeur capitalisée C_0 de la somme empruntée C avant le début des versements (voir Exercice 1.8). Il faut bien comprendre que C_0 est le montant dû au début de la période durant laquelle a lieu le versement de la première annuité alors que C est le capital emprunté initialement. Ces deux quantités coïncident lorsqu'il n'y a pas de report du paiement de la première annuité mais diffèrent lorsque celui-ci est différé.
Attention : Lorsqu'un annuité a_k est nulle le capital restant dû au début de la $(k+1)^{e}$ période est donné par :

$$C_k = C_{k-1} + I_k.$$

Proposition 1.15. *1. On a :*

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$C_k = C_0 - \sum_{j=1}^{k} m_j = C_0 - m_1 - m_2 - \cdots - m_k.$$

En particulier,

$$C_{n-1} = m_n.$$

3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - (1+\tau)m_k.$$

4. On a :

$$a_n = m_n(1+\tau).$$

Exercice 1.6. Le premier amortissement d'un emprunt est $m_1 = 1000$€ et le deuxième $m_2 = 2000$€. Les deux premières annuités sont respectivement $a_1 = 2000$€ et $a_2 = 2950$€. Déterminer le taux τ de l'emprunt, le montant des intérêts de la première période I_1 puis le capital emprunté C_0.

Solution : D'après la proposition précédente, on sait que :

$$a_2 - a_1 = m_2 - (1+\tau)m_1,$$

soit

$$950 = 2950 - 2000 = 2000 - (1+\tau)1000.$$

On en déduit que :

$$1000(1+\tau) = 2000 - 950 = 1050,$$

puis que :

$$1 + \tau = \frac{1050}{1000} = 1,05.$$

Ainsi, le taux de l'emprunt est de 5%. On a $I_1 = a_1 - m_1 = 2000 - 1000 = 1000$€. Puisque $I_1 = C_0\tau$, on obtient que le capital emprunté est :

$$C_0 = \frac{I_1}{\tau} = \frac{1000}{0,05} = 20000€.$$

Exercice 1.7. Un emprunt a été souscrit sur 4 mois et on ne dispose que des informations synthétisées dans le tableau suivant.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1			200	240
2			300	
3			300	
4			200	

1. Déterminer C_0 et I_1. En déduire, le taux mensuel τ de l'emprunt.
2. Compléter le tableau d'amortissement.

Solution :

1. On a :
$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 200 + 300 + 300 + 200 = 1000€$$
et
$$I_1 = a_1 - m_1 = 240 - 200 = 40€.$$
Puisque $I_1 = C_0\tau$, on en déduit que le taux mensuel est
$$\tau = \frac{I_1}{C_0} = \frac{40}{1000} = 4\%.$$

2. Le tableau d'amortissement complet est le suivant.

Moisn° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	1000	40	200	240
2	800	32	300	332
3	500	20	300	320
4	200	8	200	208

Exercice 1.8. Un emprunt de 10000€ est contracté au taux annuel de $1,75\%$. Aucun versement n'est demandé la première année, puis 5 mensualités sont exigées avec des amortissements constants sur cette période.

1. Quel est le capital dû au début du remboursement ?
2. Déterminer le taux mensuel à appliquer.
3. Déterminer le montant des amortissements.
4. Dresser le tableau d'amortissement.

Solution :

1. Le remboursement du capital et des intérêts débute lors du 13$^{\text{e}}$ mois. La valeur due au début de ce mois est composée du capital emprunté et des intérêts d'une année complète :
$$C_0 = C(1+\tau) = 10000 \times 1,0175 = 10175€.$$

2. Le taux mensuel à appliquer est le taux mensuel équivalent au taux annuel $\tau_{\mathrm{a}} = 1,75\%$. Celui-ci est donné par :
$$\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}} = (1+\tau_{\mathrm{a}})^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,0175^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0,14468\%.$$

3. Puisqu'il n'y a aucun versement durant les 12 premiers mois, on a $m_1 = m_2 = \cdots = m_{12} = 0$ (et $a_1 = a_2 = \cdots = a_{12} = 0$). Les cinq amortissements suivants sont égaux et permettent de rembourser le capital restant dû au bout d'un an. On a donc :
$$5m_{13} = m_{13} + m_{14} + m_{15} + m_{16} + m_{17} = C_{12}.$$
D'où
$$m_{13} = m_{14} = m_{15} = m_{16} = m_{17} = \frac{C_{12}}{5} = \frac{10175}{5} = 2035€.$$

4. Le tableau d'amortissement prend la forme suivante.

Période n° k	Capital restant dû C_{k-1}	Intérêts I_k	Amortissement m_k	Annuité a_k
1	10000	$14,47$	$-14,47$	0
2	$10014,47$	$14,49$	$-14,49$	0
...	...	...	...	...
12	$10160,30$	$14,70$	$-14,70$	0
13	10175	$14,72$	2035	$2049,72$
14	8140	$11,78$	2035	$2046,78$
15	60105	$8,83$	2035	$2043,83$
16	4070	$5,89$	2035	$2040,89$
17	2035	$2,94$	2035	$2037,94$

1.4.1 Emprunts *in fine*

Définition 1.13. *Un emprunt indivis est dit* in fine *si le remboursement du capital C_0 s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat.*

Remarque 1.19. Dans le cas d'un emprunt *in fine* les $n-1$ premiers amortissements sont nuls ($m_1, \dots, m_{n-1} = 0$) et $m_n = C_0$. Le capital restant à rembourser n'évolue donc pas avant le terme du contrat : $C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}$. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, l'annuité a_k ne sert qu'à rembourser les intérêts de la période et vaut :

$$a_k = I_k = C_{k-1}\tau = C_0\tau.$$

La dernière annuité vaut quant à elle :

$$a_n = I_n + m_n = C_{n-1}\tau + m_n = C_0\tau + C_0 = C_0(1+\tau).$$

1.4.2 Emprunts à annuités constantes

Définition 1.14. *Un emprunt indivis est dit* à annuités constantes *si les annuités sont constantes (i.e. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ pour un certain réel a).*

Proposition 1.16. *Pour un emprunt à annuités constantes, on a :*

1. *pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:*

$$m_{k+1} = m_k(1+\tau)\,;$$

2. $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1}$;
3. $a_k = \frac{C_0\tau}{1-(1+\tau)^{-n}}$.

Remarque 1.20. La proposition précédente montre que $m_1, \dots, m_n$ sont les n premiers termes de la suite géométrique de raison $(1+\tau)$ et de premier terme $m_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n-1}$. En particulier, les amortissements sont croissants.

Exercice 1.9. Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes de 15000€ sur 61 mois au taux mensuel de $1,5\%$.

Indication : Commencer par déterminer la suite des amortissements de cet emprunt en utilisant la Proposition 1.16.

1.4.3 Emprunts à amortissements constants

Définition 1.15. *Un emprunt indivis est dit* à amortissements constants *si les amortissements sont constants (i.e. $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ pour un certain réel m).*

Proposition 1.17. *Pour un emprunt à amortissements constants, on a :*

1. *pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:*
$$m_k = \frac{C_0}{n}\,;$$
2. *pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:*
$$a_{k+1} = a_k - \frac{C_0 \tau}{n}.$$

Remarque 1.21. La proposition précédente montre que $a_1, \ldots, a_n$ sont les n premiers termes de la suite arithmétique de raison $-\frac{C_0\tau}{n}$ et de premier terme $a_1 = C_0\left(\tau + \frac{1}{n}\right)$. En particulier, les annuités sont dégressives.

Exercice 1.10. Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissement constants de 600€ sur 3 mois au taux mensuel de 3%.

Indication : Commencer par déterminer la suite des amortissements de cet emprunt.

Exercice 1.11. La première annuité d'un emprunt à amortissements constants est de $a_1 = 360$ et le premier amortissement $m_1 = 300$. Le taux mensuel est de 2%. Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt.
Indication : Commencer par déterminer les intérêts de la première période I_1. En déduire le capital emprunté C_0 puis la durée de l'emprunt (*i.e.* le nombre n de mois). Dresser finalement le tableau.

1.5 Complément : Convergence et limites de suites

Définition 1.16. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$* converge vers $l \in \mathbf{R}$ *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$:*
$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Définition 1.17. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$* diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) *si, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$:*
$$n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A \quad (resp. u_n \leq -A).$$

On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad (resp.\ -\infty).$$

Proposition 1.18. *1. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l_1 et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l_2, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $l_1 + l_2$, $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $l_1 l_2$, et si $l_2 \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\frac{l_1}{l_2}$.*

2. S'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq v_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

En particulier, s'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq v_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $-\infty$), alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $-\infty$).

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers un même réel l, et s'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge aussi vers l.

Il est parfois utile de s'assurer de la convergence d'une suite sans pour autant déterminer sa limite. La proposition suivante permet de faire ceci.

Proposition 1.19. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors elle est convergente.*

Preuve : Quitte à remplacer la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il suffit de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.

Soit l le plus petit majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc il existe N tel que $l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, donc pour tout $n \geq N$, $l - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq l \leq l + \varepsilon$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l. □

Remarque 1.22. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et n'est pas majorée (resp. décroissante et n'est pas minorée), alors elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition 1.18. *On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

Théorème 1.1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante. Remarquons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par u_0. Par la Proposition 1.19, ces deux suites sont convergentes.

On a de plus :

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

□

Exercice 1.12. Montrer que les suite définies par :

$$u_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

sont adjacentes et déterminer leur limite.

1.6 Complément : la méthode de Newton

La *méthode de Newton* est une méthode numérique de résolution d'équations de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction dérivable.

L'idée est la suivante. Supposons que f soit une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et s'annulant une seule fois sur cet intervalle en r. Rappelons que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Si x_0 est assez proche de la racine r, la tangente en x_0 fournit une bonne approximation de la fonction f sur un intervalle contenant r.

On peut donc écrire que :

$$0 = f(r) \simeq f'(x_0)(r - x_0) + f(x_0).$$

On en déduit que, si $f'(x_0) \neq 0$:

$$r \simeq x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

donc que, si x_0 est proche de r, $x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ l'est encore plus (voir Figure Newt).

On considère donc la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \\ u_0 \text{ donné proche de } r \end{cases}.$$

On montre que, sous certaines conditions, cette suite converge vers r.

Théorème 1.2 (Admis)**.** *Soit f une fonction deux fois continument dérivable sur un intervalle I, s'annulant en un point r intérieur à I et telle que $f'(r) \neq 0$.*

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \\ u_0 \in]r - \varepsilon; r + \varepsilon[\text{ donné} \end{cases}$$

converge vers r.

S'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [r - \eta; r + \eta] \subset I$, on a $|f''(x) \leq M$ et $|1/f'(x)| \leq m$ alors tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \min(2/(mM); \eta)$ convient.

Remarque 1.23. On peut également avoir des informations sur la vitesse à laquelle la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers r. Par exemple, si $f'(r) > 0$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [r, b]$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(r)}.$$

Exemple 1.20. La méthode de Newton permet par exemple de déterminer une valeur approchée avec une précision arbitraire de $\sqrt{2}$. Pour cela considérons l'équation $f(x) := x^2 - 2 = 0$ avec $x \in [1,2]$. L'unique solution de cette équation sur l'intervalle $[1,2]$ est clairement $\sqrt{2}$. On a :

$$f'(x) = 2x \quad \text{et} \quad f''(x) = 2.$$

En particulier, $f'(\sqrt{2}) \neq 0$, $|f''(x) \leq 2$ et $|1/f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} \\ u_0 = 1,9 \end{cases}$$

converge vers r (Exercice : le montrer en vérifiant que cette suite est décroissante et minorée). On a de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq u_n - r\sqrt{2} \leq \frac{u_n^2 - 2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{u_n^2 - 2}{2}.$$

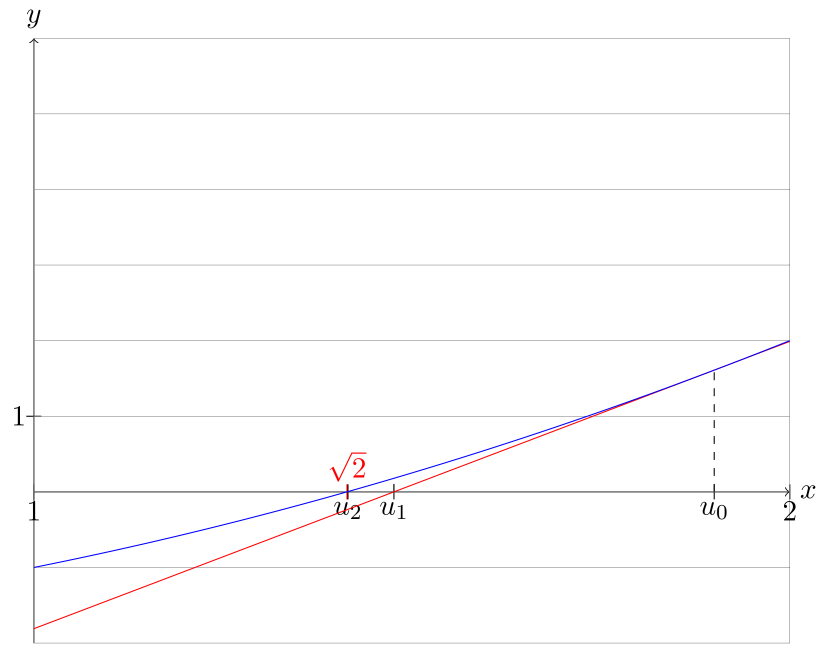


Figure 1.1 – Courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1;2]$ (bleu), sa tangente en 1,9 (rouge) et les premiers termes de la suite utilisée dans la méthode de Newton dans ce cas.

Le tableau suivant donne les premiers termes de la suite et la borne sur la différence $u_n - \sqrt{2}$; on observe que l'on obtient très vite une excellente précision.

Terme de la suite	Borne sur la précision
$u_0 = 1,9$	$\frac{u_0^2-2}{2} = 0,805$
$u_1 \simeq 1,4763157895$	$\frac{u_1^2-2}{2} \simeq 0,09$
$u_2 \simeq 1,4155197486$	$\frac{u_2^2-2}{2} \simeq 0,0018$
$u_3 \simeq 1,414214165$	$\frac{u_3^2-2}{2} \simeq 9 \times 10^{-7}$
$u_4 \simeq 1,4142135624$	$\frac{u_3^2-2}{2} \simeq 9 \times 10^{-13}$

1.7 Complément : Taux annuel effectif global (TAEG)

Nous avons jusqu'ici négligé les frais annexes liés à un prêt. En général, le prêteur demande à l'emprunteur de rembourser le capital et les intérêts mais aussi de payer des frais de gestion et d'assurance. Le *taux annuel effectif global (TAEG)* permet d'exprimer le coût global d'un crédit. Le TAEG est défini par la directive 98/7/CE du Parlement européen. En France, il est utilisé comme taux effectif de référence pour les crédits à la consommation depuis le 10 juin 2002. Les directives européennes 2008/48/CE et 2014/17/UE l'on rendu taux effectif légal pour les crédits à la consommation (à partir du 23 avril 2008) puis pour les crédits immobiliers aux particuliers (à partir du 21 mars 2016).

Le TAEG est défini par la directive 98/7/CE du Parlement européen. Dans le cadre d'un emprunt indivis d'un capital C_0 consenti en une seule fois et remboursable par des annuités $a_1, \dots, a_n$ versées aux temps t_k exprimés en fractions d'années après la souscription du prêt, le TAEG est la solution de l'équation :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1 + \mathrm{TAEG})^{t_k}}.$$

Remarque 1.24.
- Une année comporte soit 365 jours, soit 365,25 jours, soit 366 si elle est bissextile, 52 semaines ou 12 mois normalisés.
- L'équation définissant le TAEG ne peut pas toujours être résolue de façon exacte et on peut avoir recourt à des approximations numériques.
- Si plusieurs possibilités de prêts sont proposées pour acquérir le même capital, l'emprunteur a tout intérêt à choisir celui présentant le TAEG le plus faible.
- Lorsque l'assurance est facultative, on peut calculer les TAEG avec et hors assurance. Le *Taux annuel effectif d'assurance* (TAEA) fourni un indicateur permettant de comparer des assurances. Il est simplement défini dans le Décret n° 2014-1190 du 15 octobre 2014 comme la différence entre le TAEG avec assurance et le TAEG hors assurance.

Exemple 1.21. Un prêteur consent un emprunt de 3000€ . L'emprunteur s'engage en contrepartie à régler 150€ de frais de dossiers et d'assurance puis 1600€ après six mois et un an. Le premier versement de 150€ a lieu au bout de 0 ans, le deuxième (de 1600€) au bout d'une demie année et le troisième (de 1600€ également) au bout d'un an. L'équation définissant le TAEG s'écrit donc :

$$3000 = 150 + \frac{1600}{(1 + \mathrm{TAEG})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1600}{1 + \mathrm{TAEG}}.$$

En posant $x = \frac{1}{(1+\text{TAEG})^{\frac{1}{2}}}$, cette équation se réécrit :

$$3000 = 150 + 1600x + 1600x^2,$$

soit

$$1600x^2 + 1600x - 2850 = 0. \tag{1.7.1}$$

Le discriminant du polynôme du second degré $1600x^2 + 1600x - 2850$ est :

$$\Delta = 1600^2 + 4 \times 1600 \times 2850 = 20800000.$$

L'équation précédente admet donc pour solutions :

$$x_1 = \frac{-1600 - \sqrt{20800000}}{2 \times 1600} = \frac{-1600 - 400\sqrt{130}}{2 \times 1600} = \frac{-4 - \sqrt{130}}{8}$$

et

$$x_2 = \frac{-1600 + \sqrt{20800000}}{2 \times 1600} = \frac{-1600 + 400\sqrt{130}}{2 \times 1600} = \frac{-4 + \sqrt{130}}{8}.$$

En utilisant que $x = \frac{1}{(1+\text{TAEG})^{\frac{1}{2}}}$, on déduit que $(1 + \text{TAEG})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x}$ puis $\text{TAEG} = \frac{1}{x^2} - 1$, où x est une des deux solutions de l'équation 1.7.1. Avec x_1, on obtient :

$$\frac{1}{x_1^2} - 1 \simeq -0,73,$$

ce qui n'est pas possible, le TAEG étant positif. Avec x_2, on obtient :

$$\text{TAEG} = \frac{1}{x_2^2} - 1 \simeq 0,1682 = 16,82\%.$$

Le TAEG est donc ici de $16,82\%$.

Exercice 1.13. Reprendre l'Exemple 1.21 en négligeant les frais de dossier et d'assurance. Comparer les TAEG avec et sans frais de dossier et assurance.

1.8 Complément : Rentabilité d'un investissement

Une entreprise peut investir dans de nouveaux équipements afin d'améliorer le volume ou l'efficacité de sa production. Dans cette section, on présente des outils permettant d'évaluer la rentabilité d'un investissement.

1.8.1 Valeur actuelle nette

Définition 1.19. *On appelle* valeur actuelle nette (VAN) *d'un investissement la valeur actuelle des flux de trésorerie provoqués par cet investissement. Si le taux d'actualisation annuel est τ, le montant de l'investissement I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie r_k en fin de k^e année, la valeur actuelle nette de l'investissement est donnée par :*

$$\text{VAN} = -I + \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{(1+\tau)^k}.$$

Remarque 1.25. Dans la pratique, la difficulté est d'estimer le taux d'actualisation et les flux de trésorerie provoqués par l'investissement.

Proposition 1.20. *Si le taux d'actualisation annuel est τ, le montant de l'investissement I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie constant égaux à r à la fin de chaque année, la valeur actuelle nette de l'investissement est donnée par :*

$$\mathrm{VAN} = -I + r\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau}.$$

Preuve : Exercice. □

1.8.2 Taux de rentabilité interne

Définition 1.20. *On appelle* taux de rentabilité interne (TRI) *d'un investissement le taux d'actualisation annulant la valeur actuelle nette de celui-ci. Si le montant de l'investissement est I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie r_k en fin de k^e année, le taux de rentabilité interne* TRI *de l'investissement est solution de l'équation :*

$$-I + \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{(1+\mathrm{TRI})^k} = 0.$$

Remarque 1.26. On choisit généralement de réaliser un investissement lorsque son TRI est suffisamment supérieur au taux d'intérêt bancaire (il faut tenir compte des risques). Le TRI donne un critère pour décider si un investissement est susceptible d'être rentable mais n'est en aucun cas un critère objectif pour choisir entre deux investissements ; il faut avoir recourt à la VAN.

Proposition 1.21. *Si le montant de l'investissement est I et qu'il est prévu que l'investissement entraîne pendant n années des flux de trésorerie r_k en fin de k^e année, le taux de rentabilité interne* TRI *de l'investissement est solution de l'équation :*

$$-I + r\frac{1-(1+\mathrm{TRI})^{-n}}{\mathrm{TRI}} = 0.$$

Preuve : Exercice. □

1.9 Complément : taux proportionnels et équivalents

Définition 1.21. *Deux taux d'intérêts simples τ_1 et τ_2, définis sur des périodes de durées P_1 et P_2 respectivement (exprimées en la même unité de temps), sont dit* proportionnels *si pour tout capital C_0 les valeurs acquises au bout de la même durée sont identiques, c'est-à-dire :*

$$C_0\tau_1 \times \frac{n}{P_1} = C_0\tau_2 \times \frac{n}{P_2}, \qquad \textit{pour tout } C_0, \ \textit{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Il est immédiat de vérifier que :

Proposition 1.22. *Deux taux d'intérêts simples τ_1 et τ_2, définis sur des périodes P_1 et P_2 respectivement, sont proportionnels si, et seulement si,*

$$\frac{\tau_1}{P_1} = \frac{\tau_2}{P_2}.$$

En particulier, le taux mensuel τ_m^{prop} proportionnel à un taux annuel τ_a est donné par

$$\tau_m^{prop} = \frac{\tau_a}{12}$$

alors que le taux annuel τ_a^{prop} proportionnel à un taux mensuel τ_m est donné par

$$\tau_a^{prop} = 12\tau_m.$$

Exemple 1.22. Déterminons le taux trimestriel $\tau_{\mathrm{t}}^{\mathrm{prop}}$ proportionnel au taux annuel $\tau_{\mathrm{a}} = 2\%$. Un trimestre comporte 3 mois (soit 90 jours) et une année 12 mois (soit 360 jours). Le taux trimestriel $\tau_{\mathrm{t}}^{\mathrm{prop}}$ proportionnel à τ_{a} vérifie donc :

$$\frac{\tau_{\mathrm{t}}^{\mathrm{prop}}}{90} = \frac{\tau_{\mathrm{a}}}{360},$$

soit

$$\tau_{\mathrm{t}}^{\mathrm{prop}} = \frac{90}{360}\tau_{\mathrm{a}} = \frac{1}{4} \times 2\% = 0,5\%.$$

Définition 1.22. *Deux taux d'intérêts composés τ_1 et τ_2, définis sur des périodes de durés P_1 et P_2 respectivement (exprimées en la même unité de temps), sont dit* équivalents *si pour tout capital C_0 les valeurs acquises au bout de la même durée sont identiques, c'est-à-dire :*

$$C_0 (1+\tau_1)^{\frac{n}{P_1}} = C_0 (1+\tau_2)^{\frac{n}{P_2}}, \qquad \textit{pour tout } C_0, \ \textit{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Il est immédiat de vérifier que :

Proposition 1.23. *Deux taux d'intérêts composés τ_1 et τ_2, définis sur des périodes P_1 et P_2 respectivement, sont équivalents si, et seulement si,*

$$(1+\tau_1)^{\frac{1}{P_1}} = (1+\tau_2)^{\frac{1}{P_2}}.$$

En particulier, le taux mensuel $\tau_m^{équiv}$ équivalent à un taux annuel τ_a est donné par

$$\tau_m^{équiv} = (1+\tau_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

alors que le taux annuel $\tau_a^{équiv}$ équivalent à un taux mensuel τ_m est donné par

$$\tau_a^{équiv} = (1+\tau_m)^{12} - 1.$$

Exemple 1.23. Rappelons qu'il est d'usage de considérer 25 quinzaines par an. Le taux équivalent par quinzaine au taux annuel de rémunération $\tau_{\mathrm{a}} = 0,75\%$ est donc donné par :

$$\tau_{\mathrm{q}}^{\mathrm{équiv}} = (1+\tau_{\mathrm{a}})^{\frac{1}{25}} - 1 = 1,0075^{\frac{1}{25}} - 1 \simeq 0,00000299\%.$$

1.9.1 Complément : Taux nominaux, périodiques et effectifs

Définition 1.23. *Soit un produit financier dont les capitalisations ont lieu n fois par an au* taux périodique $\tau_{pér}$.

On appelle taux nominal *du produit :*

$$\tau_{nom} = n\tau_{pér}.$$

Dans le cadre d'intérêts simples, il n'y a aucun problème et le taux nominal est bien le taux annuel proportionnel au taux périodique. Par contre, dans le cadre d'intérêts composés le taux nominal n'est pas le taux annuel équivalent au taux périodique. Ceci conduit à la définition du *taux annuel effectif* correspondant à un taux nominal.

Définition 1.24. *Soit un produit financier dont les capitalisations ont lieu n fois par an et affiché au taux nominal τ_{nom}.*

On appelle taux d'intérêt annuel effectif *du produit le taux annuel équivalent au taux périodique correspondant, c'est-à-dire le taux :*

$$\tau_{eff} = (1 + \tau_{pér})^n - 1 = \left(1 + \frac{\tau_{nom}}{n}\right)^n - 1.$$

Exemple 1.24. Le livret A est un produit financier rémunéré depuis le 1er août 2022 au taux nominal de 2%. Les intérêts sont capitalisés au 1e et 16 de chaque mois, soit sur 24 périodes. Son taux périodique est donc $\tau_{\text{pér}} = \frac{0{,}02}{24} \simeq 0,08333\%$. Le taux effectif de ce livret est :

$$\tau_{\text{eff}} = (1 + \tau_{\text{pér}})^{24} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{24}\right)^{24} - 1 \simeq 2,0193\%.$$

Le même raisonnement que dans l'Exemple 1.12, montre que, si sont taux n'évolue pas et sans autre versement, le Livret A permet de doubler un capital placé au bout de 35 ans.

1.10 Complément : preuves

Preuve de la Proposition 1.2 : Nous allons démontrer ce résultat par un *raisonnement par récurrence*. Le principe du raisonnement par récurrence est le suivant. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ (ou pour tout n plus grand qu'un certain N), on peut :

- montrer qu'elle est vraie au rang initial $n = 0$ (ou $n = N$; on parle d'*initialisation*),
- montrer qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, c'est-à-dire que si l'on suppose la propriété vraie au rang n (ou jusqu'à un rang n), on est alors capable de montrer qu'elle l'est aussi au rang $n + 1$,
- conclure par le principe du raisonnement par récurrence.

Définissons l'hypothèse de récurrence :

(H_n) le terme d'ordre n de la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est donné par $u_n = u_0 + nr$.

Initialisation : au rang $n = 0$, c'est évident ! En effet, $u_0 = u_0 + 0 \times r$.
Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n, (H_n) soit vraie et montrons que (H_{n+1}) est alors vraie.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r && \text{(par définition)} \\ &= u_0 + nr + r && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence } (\mathrm{H}_n)\text{)} \\ &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété (H_n) est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
Conclusion : La propriété (H_n) étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, le principe du raisonnement par récurrence nous permet de conclure que le terme général de la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est donné par :

$$u_n = u_0 + nr, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

□

Preuve de la Proposition 1.3 : Nous allons donner deux preuves de ce résultat.
Preuve 1 [« à la Gauss »] : Commençons par écrire que, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0,

$$\begin{array}{llllll} S_n & = u_0 & +u_1 & + \dots & +u_{n-2} & +u_{n-1} \\ & = u_0 & +u_0 + r & + \dots & +u_0 + (n-2)r & +u_0 + (n-1)r. \end{array}$$

L'astuce est alors d'écrire l'identité précédente de gauche à droite et de droite à gauche et de sommer terme à terme :

$$\begin{array}{lllllll} & S_n & = u_0 & +u_0 + r & + \dots & +u_0 + (n-2)r & +u_0 + (n-1)r \\ + & S_n & = u_0 + (n-1)r & +u_0 + (n-2)r & + \dots & +u_0 + r & +u_0 \\ \hline & 2S_n & = 2u_0 + (n-1)r & +2u_0 + (n-1)r & + \dots & +2u_0 + (n-1)r & +2u_0 + (n-1)r \end{array}.$$

En observant qu'il y a n termes dans le membre de droite de la dernière identité, on obtient que :

$$2S_n = n\left(2u_0 + (n-1)r\right) = n\left(u_0 + u_{n-1}\right),$$

d'où

$$S_n = \frac{n\left(u_0 + u_{n-1}\right)}{2}.$$

Preuve 2 [par récurrence] : Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
L'hypothèse de récurrence est, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$(\mathrm{H}_n) \qquad S_n = \frac{n\left(u_0 + u_{n-1}\right)}{2}$$

Initialisation : au rang $n = 1$, c'est évident ! En effet, $S_1 = u_1 = \frac{1\times(u_1+u_1)}{2}$.
Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n, (H_n) soit vraie et montrons que (H_{n+1}) est alors vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + u_n && \text{(par définition de } S_{n+1} \text{ et } S_n\text{)} \\
&= \frac{n\left(u_0 + u_{n-1}\right)}{2} + u_n && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence } (\mathrm{H}_n)\text{)} \\
&= \frac{n\left(u_0 + u_0 + (n-1)r\right)}{2} + u_0 + nr && \text{(en utilisant la Proposition 1.2)} \\
&= \frac{2nu_0 + n(n-1)r + 2u_0 + 2nr}{2} \\
&= \frac{2(n+1)u_0 + (n+1)nr}{2} \\
&= \frac{(n+1)\left(2u_0 + nr\right)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\left(u_0 + u_n\right)}{2} && \text{(en utilisant la Proposition 1.2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété (H_n) est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
Conclusion : La propriété (H_n) étant vraie au rang $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, le principe du raisonnement par récurrence nous permet de conclure que :

$$S_n = \frac{n\left(u_0 + u_{n-1}\right)}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

$\square$

Preuve de la Proposition 1.6 : Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Définissons l'hypothèse de récurrence :

(H_n) le terme d'ordre n de la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est donné par $u_n = q^n u_0$.

Initialisation : au rang $n = 0$, c'est évident ! En effet, $u_0 = q^0 u_0$.
Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n, (H_n) soit vraie et montrons que (H_{n+1}) est alors vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= qu_n && \text{(par définition)} \\
&= qq^n u_0 && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence } (\mathrm{H}_n)\text{)} \\
&= q^{n+1} u_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété (H_n) est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
Conclusion : La propriété (H_n) étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, le principe du raisonnement par récurrence nous permet de conclure que le terme général de la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est donné par :

$$u_n = q^n u_0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

$\square$

Preuve de la Proposition 1.7 : Plusieurs preuves de ce résultat existent.

Preuve 1 [« à la Gauss »] : Commençons par écrire que, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0,

$$\begin{array}{llllll} S_n & = u_0 & +u_1 & +\dots & +u_{n-2} & +u_{n-1} \\ & = u_0 & +qu_0 & +\dots & +q^{n-2}u_0 & q^{n-1}u_0. \end{array}$$

L'astuce est alors de retrancher qS_n à S_n :

$$\begin{aligned} (1-q)S_n &= S_n - qS_n \\ &= u_0 + qu_0 + \cdots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q(u_0 + qu_0 + \cdots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0) \\ &= u_0 + qu_0 + \cdots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - qu_0 + \cdots + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0 - q^n u_0 \\ &= u_0\left(1-q^n\right). \end{aligned}$$

En simplifiant par $1-q \neq 0$, on obtient que :

$$S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Preuve 2 [par récurrence] : Exercice ! $\square$

Preuve de la Proposition 1.14 : On utilise, dans chaque cas, que l'on sait calculer les sommes partielles de suites géométriques (voir Sous-section 1.1.2). En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k &= \frac{1}{1+\tau} \times \frac{1-\frac{1}{(1+\tau)^n}}{1-\frac{1}{1+\tau}} = \frac{1}{1+\tau} \times \frac{\frac{(1+\tau)^n-1}{(1+\tau)^n}}{\frac{1+\tau-1}{1+\tau}} \\ &= (1+\tau)^{-n} \frac{(1+\tau)^n-1}{\tau}. \end{aligned}$$

1. On écrit que :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^{n} a\,(1+\tau)^{n+1-k} = a \sum_{k=1}^{n} (1+\tau)^{n+1-k} \\ &= a\,(1+\tau)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} (1+\tau)^{-k} = a\,(1+\tau)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k \\ &= a\,(1+\tau)^{n+1}\,(1+\tau)^{-n}\,\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau} = a\,(1+\tau)\,\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau}. \end{aligned}$$

2. On écrit que :

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{k=1}^{n} a\,(1+\tau)^{1-k} = a \sum_{k=1}^{n} (1+\tau)^{1-k} \\ &= a\,(1+\tau) \sum_{k=1}^{n} (1+\tau)^{-k} = a\,(1+\tau) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k \\ &= a\,(1+\tau)\,(1+\tau)^{-n}\,\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau} = a\,(1+\tau)\,\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau}. \end{aligned}$$

3. On écrit que :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^{n} a\,(1+\tau)^{n-k} = a\sum_{k=1}^{n}(1+\tau)^{n-k} \\ &= a\,(1+\tau)^n\sum_{k=1}^{n}(1+\tau)^{-k} = a\,(1+\tau)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k \\ &= a\,(1+\tau)^n\,(1+\tau)^{-n}\,\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau} = a\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau}. \end{aligned}$$

4. On écrit que :

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{k=1}^{n} a\,(1+\tau)^{-k} = a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k = a\,(1+\tau)^{-n}\,\frac{(1+\tau)^n-1}{\tau} \\ &= a\frac{1-(1+\tau)^{-n}}{\tau}. \end{aligned}$$

□

Preuve de la Proposition 1.15 :

1. Par définition, les amortissement servent à rembourser (exactement) le capital emprunté.
2. On a $C_1 = C_0 - m_1$, $C_2 = C_1 - m_2 = C_0 - m_1 - m_2$, …, $C_k = C_{k-1} - m_k = C_0 - \sum_{j=1}^{k} m_j$, …, $C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1} = C_0 - \sum_{j=1}^{n-1} m_j$. Puisque $C_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k$, on en déduit que :

$$C_{n-1} = C_0 - \sum_{j=1}^{n-1} m_j = \sum_{k=1}^{n} m_k - \sum_{j=1}^{n-1} m_j = m_1 + \cdots + m_{n-1} + m_n - m_1 - \cdots - m_{n-1} = m_n.$$

3. On a, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= m_{k+1} + C_k\tau - (m_k + C_{k-1}\tau) \\ &= m_{k+1} + (C_{k-1} - m_k)\,\tau - m_k - C_{k-1}\tau \\ &= m_{k+1} + \cancel{C_{k-1}\tau} - m_k\tau - m_k - \cancel{C_{k-1}\tau} \\ &= m_{k+1} - (1+\tau)\,m_k. \end{aligned}$$

4. On a :

$$a_n = I_n + m_n = C_{n-1}\tau + m_n.$$

   Or, $C_{n-1} = m_n$, donc

$$a_n = m_n\tau + m_n = m_n(1+\tau).$$

□

Preuve de la Proposition 1.16 :

1. Puisque les annuités sont constantes, on a $a_{k+1} = a_k$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= a_{k+1} - I_{k+1} = a_k - C_k\tau \\ &= a_k - (C_{k-1} - m_k)\,\tau = a_k - C_{k-1}\tau + m_k\tau \\ &= m_k + m_k\tau = m_k(1+\tau). \end{aligned}$$

2. Nous venons de voir que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$m_{k+1} = m_k(1+\tau).$$

On en déduit que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$m_{k+1} = m_1(1+\tau)^k\,;$$

Donc,

$$C_0 = \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{k=0}^{n-1} m_1(1+\tau)^k = m_1 \sum_{k=0}^{n-1}(1+\tau)^k = m_1 \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

D'où le résultat.

3. Il suffit d'écrire que

$$a_k = a_1 = m_1 + I_1 = \frac{C_0\tau}{(1+\tau)^n - 1} + C_0\tau = \frac{C_0\tau(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} = \frac{C_0\tau}{1-(1+\tau)^{-n}}.$$

□

Preuve de la Proposition 1.17 :

1. Puisque les amortissements sont constants, on a $m_1 = \cdots = m_n = m$. Or, $C_0 = m_1 + \cdots + m_n = nm$. D'où, $m = \frac{C_0}{n}$.
2. Puisque les amortissements sont constants, on a $m_{k+1} = m_k = \frac{C_0\tau}{n}$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= I_{k+1} + m_{k+1} = C_k\tau + m_k \\ &= (C_{k-1} - m_k)\,\tau + m_k = C_{k-1}\tau + m_k - \frac{C_0\tau}{n} \\ &= a_k - \frac{C_0\tau}{n}. \end{aligned}$$

□