IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année TD2, 2015-2016

Correction du Contrôle Continu n^o 1

Exercice 1 : Résoudre dans **R** les équations suivantes :

1. L'équation $\ln(x^2+9) = \ln(6) + \ln(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x^2+9) = \ln(6) + \ln(x) &\Longleftrightarrow \ln(x^2+9) = \ln(6x)\\ &\Longleftrightarrow x^2+9 = 6x\\ &\Longleftrightarrow x^2-6x+9 = 0\\ &\Longleftrightarrow (x-3)^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow x = 3.\end{aligned}$$

   L'unique solution de cette l'équation est 3.

2. L'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ est définie pour tout réel x. On a :

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Longleftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0.$$

   En effectuant le changement de variable $X = e^x$, on se ramène à résoudre en X l'équaiton du second degré :

$$X^2 - 5X + 6 = 0.$$

   Le discriminant du polynôme du second degré $X^2 - 5X + 6$ est

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

   et les solutions de l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ sont

$$X_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times 1} = 3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2\times 1} = 2.$$

   On en déduit que les solutions de l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ sont $x_1 = \ln(X_1) = \ln 3$ et $x_2 = \ln(X_2) = \ln 2$.

Exercice 2 : Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

1. La fonction f_1 est bien définie si, et seulement si, $x^2 - 4 \geq 0$ et est dérivable si et seulement si $x^2 - 4 > 0$. Ainsi,

$$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 4\} =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

   et f_1 est dérivable sur :

$$D = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 > 4\} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

   La fonction f_1 s'écrit sous la forme $f_(x) = \sqrt{u(x)}$ pour $u(x) = x^2 - 4$. Ainsi, pour $x \in D_{f_1'}$, on a :

$$f_1'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}.$$

2. La fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :
$$f_2'(x) = (2x-2)\exp(x) + (x^2-2x)\exp(x) = (x^2-2)\exp(x).$$

Exercice 3 : On rappelle que le taux mensuel proportionnel $\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}}$ au taux annuel τ_{a} est donné par $\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}} = \frac{\tau_{\mathrm{a}}}{12}$ et que le taux mensuel équivalent $\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}}$ au taux annuel τ_{a} est donné par $\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}} = (1+\tau_{\mathrm{a}})^{\frac{1}{12}} - 1$. Ici,
$$\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}} = \frac{0,0075}{12} = 0,000625 \quad \text{soit } 0,0625\%$$
et
$$\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}} = (1+0,0075)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0,000623 \quad \text{soit (environ) } 0,0623\%.$$

Exercice 4 : On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\frac{1}{3}$ et telle que $u_9 = 30$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

1. On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et que $u_9 = 30$. On a donc :
$$30 = u_9 = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^9$$
d'où
$$u_0 = 30 \times 3^9 = 590490.$$
En utilisant la formule pour la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, on obtient :
$$S_9 = u_0 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 885720$$
et
$$S_\infty = \lim_{n\to+\infty} u_0 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 885735.$$

2. On a :
$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\iff u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 1 \\ &\iff \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{u_0} \\ &\iff n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{u_0}\right) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(\frac{1}{u_0})}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln(u_0)}{\ln(3)} = \frac{\ln(590490)}{\ln(3)} \simeq 12,1. \end{aligned}$$
On a donc $u_n \leq 1$ pour tout entier supérieur ou égal à 13.

Exercice 5 : On considère un livret d'épargne au taux d'intérêt annuel composé de 5%. Chaque 1$^{\text{er}}$ janvier depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000, un épargnant place 2000€ sur ce livret.

1. Il s'agit d'un cas de versement d'annuités constantes A sans interruption sur un livret au taux annuel composé τ. Le montant du capital et des intérêts acquis C_n après le $n^{\text{ième}}$ versement est donné par :

$$C_n = A\frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = 2000\frac{1,05^n - 1}{0,05}.$$

Le montant des intérêts acquis après le $n^{\text{ième}}$ versement est donné par le capital C_n retranché de la somme des versements, c'est-à-dire :

$$2000\frac{1,05^n - 1}{0,05} - 2000n.$$

2. Le 1^{er} janvier 2015 a eu lieu le $16^{\text{ième}}$ versement. Le montant capital et les intérêts acquis après ce versement est :

$$C_{16} = 2000\frac{1,05^{16} - 1}{0,05} \simeq 47314,98€.$$

Les intérêts acquis sont alors de :

$$C_{16} - 2000 \times 16 \simeq 15314,98€.$$

3. On a :

$$\begin{aligned} C_n \geq 100000 &\iff 2000\frac{1,05^n - 1}{0,05} \geq 100000 \\ &\iff 1,05^n - 1 \geq 100000 \times \frac{0,05}{2000} = 2,5 \\ &\iff 1,05^n \geq 2,5 + 1 = 3,5 \\ &\iff n\ln(1,05) \geq \ln(3,5) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(3,5)}{\ln(1,05)} \simeq 25,7. \end{aligned}$$

L'épargnant disposera d'au moins 100000€ disponibles sur son livret après le $26^{\text{ième}}$ versement. Celui-ci aura lieu le 1^{er} janvier 2025.

Exercice 6 : Une entreprise a vu son chiffre d'affaire annuel diminuer de 10000€ chaque année entre 2006 et 2012. En 2006, son chiffre d'affaire était de 200000€.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n le chiffre d'affaire annuel de l'entreprise pour l'année $2006 + n$, exprimé en euros. On a :

$$u_{n+1} = u_n - 10000 \quad \text{et} \quad u_0 = 200000.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200000$ et de raison $r = -10000$.

2. Le chiffre d'affaire de l'entreprise en 2012 est :

$$u_6 = u_0 + 6r = 200000 - 6 \times 10000 = 140000€.$$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_n = 0 &\iff u_0 + nr = 0 \\ &\iff 200000 - 10000n = 0 \\ &\iff 10000n = 200000 \\ &\iff n = \frac{200000}{10000} = 20. \end{aligned}$$

Si son chiffre d'affaire continue d'évoluer de la même façon, celui-ci sera nul en 2026.