IUT Dijon-Auxerre
GEA 1ère année TD4, 2015-2016

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 : Résoudre dans **R** les équations suivantes :

1. L'équation $\ln(x^2+4) = \ln(4) + \ln(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(x^2+4) = \ln(4) + \ln(x) &\iff \ln(x^2+9) = \ln(4x) \\
&\iff x^2 + 4 = 4x \\
&\iff x^2 - 4x + 4 = 0 \\
&\iff (x-2)^2 = 0 \\
&\iff x = 2.
\end{aligned}$$

L'unique solution de cette l'équation est 2.

2. L'équation $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$ est définie pour tout réel x. On a :

$$e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \iff (e^x)^2 - 6e^x + 8 = 0.$$

En effectuant le changement de variable $X = e^x$, on se ramène à résoudre en X l'équaiton du second degré :

$$X^2 - 6X + 8 = 0.$$

Le discriminant du polynôme du second degré $X^2 - 6X + 8$ est

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4$$

et les solutions de l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$ sont

$$X_1 = \frac{6+\sqrt{4}}{2 \times 1} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{6-\sqrt{4}}{2\times 1} = 2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$ sont $x_1 = \ln(X_1) = \ln 4$ et $x_2 = \ln(X_2) = \ln 2$.

Exercice 2 : Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

1. La fonction f_1 est bien définie et dérivable si et seulement si $x^2 - 4 > 0$, c'est-à-dire sur :

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 > 4\} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

La fonction f_1 s'écrit sous la forme $f_(x) = \ln u(x)$ pour $u(x) = x^2 - 4$. Ainsi, pour $x \in D$, on a :

$$f_1'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2-4}.$$

2. La fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

$$f_2'(x) = (3x^2 - 6x)\exp(x) + (x^3 - 3x^2)\exp(x) = (x^3 - 6x)\exp(x).$$

Exercice 3 : On rappelle que le taux mensuel proportionnel $\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}}$ au taux annuel τ_{a} est donné par $\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}} = \frac{\tau_{\mathrm{a}}}{12}$ et que le taux mensuel équivalent $\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}}$ au taux annuel τ_{a} est donné par $\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}} = (1+\tau_{\mathrm{a}})^{\frac{1}{12}} - 1$. Ici,

$$\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{prop}} = \frac{0,03}{12} = 0,0025 \quad \text{soit } 0,25\%$$

et

$$\tau_{\mathrm{m}}^{\text{équiv}} = (1+0,03)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0,00247 \quad \text{soit (environ) } 0,247\%.$$

Exercice 4 : On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\frac{1}{5}$ et telle que $u_5 = 25$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

1. On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et que $u_5 = 25$. On a donc :

$$25 = u_5 = u_0 \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

d'où

$$u_0 = 25 \times 5^5 = 78125.$$

En utilisant la formule pour la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, on obtient :

$$S_5 = u_0 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^6 - 1}{\frac{1}{5} - 1} = 97650$$

et

$$S_\infty = \lim_{n\to+\infty} u_0 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{390625}{4}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\Longleftrightarrow u_0 \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \frac{1}{u_0} \\ &\Longleftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{u_0}\right) \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{1}{u_0})}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\ln(u_0)}{\ln(5)} = \frac{\ln(5^7)}{\ln(5)} = 7. \end{aligned}$$

On a donc $u_n \leq 1$ pour tout entier supérieur ou égal à 7.

Exercice 5 : On considère un livret d'épargne au taux d'intérêt annuel composé de 9%. Chaque 1$^{\text{er}}$ janvier depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995, un épargnant place 1995€ sur ce livret.

1. Il s'agit d'un cas de versement d'annuités constantes A sans interruption sur un livret au taux annuel composé τ. Le montant du capital et des intérêts acquis C_n après le $n^{\text{ième}}$ versement est donné par :
$$C_n = A\frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = 1995\frac{1,09^n - 1}{0,09}.$$
Le montant des intérêts acquis après le $n^{\text{ième}}$ versement est donné par le capital C_n retranché de la somme des versements, c'est-à-dire :
$$1995\frac{1,09^n - 1}{0,09} - 1995n.$$
2. Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2015 a eu lieu le 21$^{\text{ième}}$ versement. Le montant capital et les intérêts acquis après ce versement est :
$$C_{12} = 1995\frac{1,09^{21} - 1}{0,09} \simeq 113245,24€.$$
Les intérêts acquis sont alors de :
$$C_{12} - 1995 \times 12 \simeq 89305,24€.$$
3. On a :
$$\begin{aligned}
C_n \geq 150000 &\iff 1995\frac{1,09^n - 1}{0,09} \geq 150000 \\
&\iff 1,09^n - 1 \geq 150000 \times \frac{0,09}{1995} = \frac{900}{133} \\
&\iff 1,09^n \geq \frac{900}{133} + 1 = \frac{1033}{133} \\
&\iff n\ln(1,09) \geq \ln\left(\frac{1033}{133}\right) \\
&\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1033}{133}\right)}{\ln(1,09)} \simeq 23,8.
\end{aligned}$$
L'épargnant disposera d'au moins 150000€ disponibles sur son livret après le 24$^{\text{ième}}$ versement. Celui-ci aura lieu le 1$^{\text{er}}$ janvier 2018.

Exercice 6 : Une entreprise a vu son chiffre d'affaire annuel augmenter de 10000€ chaque année entre 2006 et 2012. En 2006, son chiffre d'affaire était de 200000€.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n le chiffre d'affaire annuel de l'entreprise pour l'année $2006 + n$, exprimé en euros. On a :
$$u_{n+1} = u_n + 10000 \quad \text{et} \quad u_0 = 200000.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200000$ et de raison $r = 10000$.
2. Le chiffre d'affaire de l'entreprise en 2012 est :
$$u_6 = u_0 + 6r = 200000 + 6 \times 10000 = 260000€.$$
3. On a :
$$\begin{aligned}
u_n \geq 500000 &\iff u_0 + nr \geq 500000 \\
&\iff 200000 + 10000n \geq 500000 \\
&\iff 10000n \geq 300000 \\
&\iff n \geq \frac{300000}{10000} = 30.
\end{aligned}$$
Si son chiffre d'affaire continue d'évoluer de la même façon, celui-ci sera atteindra 500000€ en 2036.