IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GMO, 2015-2016

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 : On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. .$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives e_1, e_2 et e_3, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 + e_1 = 70 \\ & x_1 + e_2 = 30 \\ & x_1 + x_2 - e_3 = 10 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array}\right. .$$

2. La troisième contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de e_3 comme variable de base conduirait à une contradiction (e_3 serait négatif) et les variables x_1 et x_2 sont présentes dans les autres contraintes. On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.

   Après l'introduction d'une variable artificielle w_1 et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A})\left\{\begin{array}{ll} \text{minimiser} & z_A = w_1 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 + e_1 = 70 \\ & x_1 + e_2 = 30 \\ & x_1 + x_2 - e_3 + w_1 = 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - z = 0 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, w_1 \geq 0 \end{array}\right. .$$

   Phase I : Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I par la méthode des tableaux avec pour variables de base initiales e_1, e_2 et w_1. Le premier tableau est le suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	70
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
w_1	1	1	0	0	-1	1	0	0	10
$-z$	5	2	0	0	0	0	1	0	0
$-z_{\mathrm{A}}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

   On exprime l'objectif artificiel z_{A} en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de w_1 dans la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ par l'opération $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$. On obtient le tableau :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	70
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
w_1	1	1	0	0	-1	1	0	0	10
$-z$	5	2	0	0	0	0	1	0	0
$-z_{\mathrm{A}}$	-1	-1	0	0	1	0	0	1	-10

Nous traitons un problème de minimisation de z_{A} et la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ soit le "plus négatif" possible. Les variables x_1 et x_2 sont ex-æquo et nous choisissons (arbitrairement) de faire entrer x_1 dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_1 dans les lignes 1 à 3. On obtient :

— 35 pour e_1,

— 30 pour e_2,

— 10 pour w_1.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire w_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_1 et x_1 et des 0 dans le reste de la colonne de x_1. En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 + L_3$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	0	-1	1	0	2	-2	0	0	50
e_2	0	-1	0	1	1	-1	0	0	20
x_1	1	1	0	0	-1	1	0	0	10
$-z$	0	-3	0	0	5	-5	1	0	-50
$-z_{\mathrm{A}}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour $(\mathrm{P_S})$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 50 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de z.

Phase II La phase II débute avec le tableau suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
e_1	0	-1	1	0	2	0	50
e_2	0	-1	0	1	1	0	20
x_1	1	1	0	0	-1	0	10
$-z$	0	-3	0	0	5	1	-50

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de e_3. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de e_3 dans les lignes 1 à 3. On obtient :
— 25 pour e_1,
— 20 pour e_2,
— -10 pour x_1.
On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs. On choisit donc de faire sortir e_2. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par e_2 et e_2 puis des 0 dans le reste de la colonne de e_4. En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
e_1	0	1	1	-2	0	0	10
e_3	0	-1	0	1	1	0	20
x_1	1	0	0	1	0	0	30
$-z$	0	2	0	-5	0	1	-150

Cette fois, x_2 est la variable entrante. Nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_2 dans les lignes 1 à 3 :
— 10 pour e_1,
— -20 pour e_3,
— ∞ pour x_1,
et nous choisissons de faire sortir e_1 de la base.

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ donnent :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
x_2	0	1	1	-2	0	0	10
e_3	0	0	1	-1	1	0	30
x_1	1	0	0	1	0	0	30
$-z$	0	0	-2	-1	0	1	-170

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = 170$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (30, 10)$.

Exercice 2 :

1. (a) **Définition des variables :** Pour $i = 1, 2$, on note x_i le nombre d'instruments C_i produits en un mois.
   (b) **Définition des contraintes :**
      i. Contrainte liée au nombre de systèmes de palettes disponibles chaque mois :

$$x_1 \leq 30.$$

      ii. Contrainte liée au nombre de branches d'embouchure disponibles chaque mois :

$$x_1 + x_2 \leq 100.$$

iii. Contrainte liée au nombre de soudures réalisables en un mois :

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 35,$$

soit en multipliant par 2

$$2x_1 + x_2 \leq 70.$$

iv. Contrainte liée au contrat avec le distributeur :

$$x_1 + x_2 \geq 10.$$

v. Contraintes de "bon sens" :

$$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$

que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

(c) **Définition de l'objectif :** Le facteur d'instruments souhaite maximiser sa marge mensuelle brute :

$$z = 5x_1 + 2x_2$$

exprimée en centaines d'euros.

(d) **Formulation du problème :**

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

(e) On remarque que ce problème est très similaire au problème ($\mathrm{P_I}$) de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $x_1 + x_2 \leq 100$ présente dans (P) mais pas dans ($\mathrm{P_I}$).

2. La contrainte présente dans (P) mais pas dans ($\mathrm{P_I}$) n'est pas saturée par la solution optimale de ($\mathrm{P_I}$) : $(x_1^*, x_2^*) = (30, 10)$ $(30 + 10 = 40 < 100)$. On en déduit qu'une solution optimale de (P) est

$$z^* = 170$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (30, 10)$. Le facteur d'instruments maximisera sa marge mensuelle brute en produisant 30 cors d'harmonie et 10 cors naturels par mois. Sa marge mensuelle brute sera alors de 17000€.