IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, GRH, 2015-2016

Correction du Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 : On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathrm{P_I})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. .$$

1. Après l'introduction de variables d'écart positives e_1, e_2 et e_3, le problème se réécrit sous forme standard de la manière suivante :

$$(\mathrm{P_S})\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 + e_1 = 40 \\ & x_1 + e_2 = 30 \\ & x_1 + 3x_2 - e_3 = 60 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array}\right. .$$

2. La troisième contrainte ne permet pas de choix évident d'une variable de base : le choix de e_3 comme variable de base conduirait à une contradiction (e_3 serait négatif) et les variables x_1 et x_2 sont présentes dans les autres contraintes. On doit donc utiliser la méthode des deux phases et on doit formuler un problème artificiel pour soit trouver une solution de base réalisable soit détecter l'impossibilité.

   Après l'introduction d'une variable artificielle w_1 et en intégrant l'objectif dans les contraintes, le problème artificiel associé à $(\mathrm{P_I})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathrm{P_A})\left\{\begin{array}{ll} \text{minimiser} & z_A = w_1 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 + e_1 = 40 \\ & x_1 + e_2 = 30 \\ & x_1 + 3x_2 - e_3 + w_1 = 60 \\ & 4x_1 + x_2 - z = 0 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, w_1 \geq 0 \end{array}\right. .$$

   Phase I : Nous pouvons maintenant débuter l'application de l'algorithme du simplexe en phase I par la méthode des tableaux avec pour variables de base initiales e_1, e_2 et w_1. Le premier tableau est le suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_\mathrm{A}$	b
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	40
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
w_1	1	3	0	0	-1	1	0	0	60
$-z$	4	1	0	0	0	0	1	0	0
$-z_\mathrm{A}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

   On exprime l'objectif artificiel z_A en fonction des "vraies" variables du problème en mettant à 0 le coefficient de w_1 dans la ligne de $-z_\mathrm{A}$ par l'opération $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$. On obtient le tableau :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	40
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
w_1	1	3	0	0	-1	1	0	0	60
$-z$	4	1	0	0	0	0	1	0	0
$-z_{\mathrm{A}}$	-1	-3	0	0	1	0	0	1	-60

Nous traitons un problème de minimisation de z_{A} et la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ contient des coefficients strictement négatifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ soit le "plus négatif" possible. Il s'agit de x_2 que l'on fait entrer x_1 dans la base. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_2 dans les lignes 1 à 3. On obtient :

— 40 pour e_1,

— ∞ pour e_2,

— 20 pour w_1.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotients le plus petit parmi les positifs, c'est-à-dire w_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_2 et x_2 et des 0 dans le reste de la colonne de x_1. On commence par diviser la troisième ligne par 3 pour mettre un 1 dans la case repérée par x_2 et x_2. On obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	40
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	20
$-z$	4	1	0	0	0	0	1	0	0
$-z_{\mathrm{A}}$	-1	-3	0	0	1	0	0	1	-60

En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 + 3L_1$, on obtient :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	w_1	$-z$	$-z_{\mathrm{A}}$	b
e_1	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	20
e_2	1	0	0	1	0	0	0	0	30
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	20
$-z$	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	-20
$-z_{\mathrm{A}}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Il ne reste plus de coefficient strictement négatif dans la ligne de $-z_{\mathrm{A}}$ et l'algorithme s'arrête. La valeur optimale de l'objectif artificiel est 0 et on a déterminé un sommet de l'ensemble des solutions admissibles pour $(\mathrm{P_S})$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant supprimer les variables artificielles et l'objectif artificiel pour passer à la phase II de maximisation de z.

Phase II La phase II débute avec le tableau suivant :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
e_1	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	20
e_2	1	0	0	1	0	0	30
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	20
$-z$	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	-20

Nous traitons un problème de maximisation de z et la ligne de $-z$ contient des coefficients positifs. Nous allons pouvoir faire entrer une nouvelle variable dans la base. Celle-ci doit être telle que le coefficient correspondant dans la ligne de $-z$ soit le "plus positif" possible. Il s'agit de x_1. Pour déterminer la variable sortante, nous calculons les quotients des coefficients de la colonne de b sur les coefficients de la colonne de x_1 dans les lignes 1 à 3. On obtient :

— 12 pour e_1,
— 30 pour e_2,
— 60 pour x_1.

On doit faire sortir de la base la variable correspondant au quotient le plus petit parmi les positifs. On choisit donc de faire sortir e_1. On doit ensuite utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour mettre un 1 dans la case repérée par x_1 et x_1 puis des 0 dans le reste de la colonne de e_4. On multiplie donc la première ligne par $\frac{3}{5}$ pour obtenir :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	12
e_2	1	0	0	1	0	0	30
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	20
$-z$	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	-20

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{11}{3}L_1$ donnent ensuite :

v.b. \ v.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	$-z$	b
x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	12
e_2	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	18
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	16
$-z$	0	0	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	1	-64

Il ne reste plus de coefficient strictement positif dans la ligne de $-z$ (sauf dans la case repérée par $-z$ et $-z$) et l'algorithme s'arrête. On a déterminé une solution optimale du problème ($\mathrm{P_I}$) :

$$z^* = 64$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (12, 16)$.

Exercice 2 :

1. (a) **Définition des variables :** Pour $i = 1, 2$, on note x_i le nombre de selles S_i produites en un mois.
   (b) **Définition des contraintes :**

i. Contrainte liée à la quantité de cuir disponible chaque mois :

$$2x_1 + x_2 \leq 40.$$

ii. Contrainte liée au nombre d'harçons de chaque modèle disponibles chaque mois :

$$x_1 \leq 30 \quad \text{et} \quad x_2 \leq 30.$$

iii. Contrainte liée au temps de travail mensuel des ouvriers :

$$x_1 + 3x_2 \geq 60.$$

iv. Contraintes de "bon sens" :

$$x_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathbb{N}$$

que l'on relâche en $x_1, x_2 \geq 0$.

(c) **Définition de l'objectif :** Le sellier souhaite maximiser sa marge mensuelle brute :

$$z = 4x_1 + x_2$$

exprimée en centaines d'euros.

(d) **Formulation du problème :**

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{sous} & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_2 \leq 30 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

(e) On remarque que ce problème est très similaire au problème ($\mathrm{P_I}$) de l'Exercice 1. Plus précisément, les deux problèmes ne diffèrent que par la contrainte $x_2 \leq 30$ présente dans (P) mais pas dans ($\mathrm{P_I}$).

2. La contrainte présente dans (P) mais pas dans ($\mathrm{P_I}$) n'est pas saturée par la solution optimale de ($\mathrm{P_I}$) : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 16)$ $(16 < 30)$. On en déduit qu'une solution optimale de (P) est

$$z^* = 64$$

atteinte en $(x_1^*, x_2^*) = (12, 16)$. Le sellier maximisera sa marge mensuelle brute en produisant 12 selles de dressage et 16 selles d'obstacle par mois. Sa marge mensuelle brute sera alors de 6400€.