IUT Dijon-Auxerre
GEA 2ème année, 2015-2016

Corrigé du contrôle groupé de Mathématiques

Ce document a été tapé (trop) vite et peut contenir quelques coquilles.

Exercice 1

1. Pour chacun des N paquets de cartes la variable aléatoire (v.a.) valant 1 si la carte tirée est un trèfle et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{52}{13} = \frac{1}{4}$. La v.a. X comptant le nombre de trèfles tirés en une série de N tirages est la somme de N v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{4}$. Ainsi, X suit loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{4}$. L'énoncé affirme que la moyenne de cette v.a. est $\mathbf{E}[X] = 2$. Or, $\mathbf{E}[X] = \frac{N}{4}$ puisque X suit loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{4}$. On en déduit que le nombre N de paquets de cartes dont il dispose est $N = 8$ et que :
$$X \sim \mathcal{B}in\left(8; \frac{1}{4}\right).$$

2. (a) La probabilité pour qu'il obtienne au moins un trèfle lors d'une série de N tirages est :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X \geq 1] &= 1 - \mathbf{P}[X = 0] \\ &= 1 - \mathbf{C}_8^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^8 \\ &= 1 - 1 \times 1 \times \frac{3^8}{4^8} = \frac{4^8 - 3^8}{4^8} \\ &= \frac{58975}{65536} \simeq 0,9.\end{aligned}$$

   (b) La probabilité pour qu'il n'obtienne que des trèfles lors d'une série de N tirages est :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X = 8] &= \mathbf{C}_8^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= \frac{1}{4^8} \\ &= \frac{1}{65536} \simeq 0,00002.\end{aligned}$$

Exercice 2

On suppose que le quotient intellectuel des conscrits suit exactement la distribution théorique, c'est-à-dire la loi normale $\mathcal{N}(0,9; 0,4)$. Rappelons que si $X \sim \mathcal{N}(0,9; 0,4)$ alors
$$Z = \frac{X - 0,9}{0,4} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$

1. (a) Le nombre N_1 de conscrits dont le Q.I. est compris entre 0,8 et 1,3 parmi les 1000 n'est autre que 1000 fois la proportion théorique de Q.I. compris entre 0,8 et 1,3. Celle-ci est donnée théoriquement par $\mathbf{P}[0,8 \leq X \leq 1,3]$. On a :
$$\begin{aligned}0,8 \leq X \leq 1,3 &\iff -0,1 \leq X - 0,9 \leq 0,4 \\ &\iff -0,25 \leq Z = \frac{X - 0,9}{0,4} \leq 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[0,8 \leq X \leq 1,3] &= \mathbf{P}[-0,25 \leq Z \leq 1]\\ &= \mathbf{P}[Z \leq 1] - \mathbf{P}[Z \leq -0,25]\\ &= \mathbf{P}[Z \leq 1] - (1 - \mathbf{P}[Z \leq 0,25])\\ &= 0,8413 + 0,5987 - 1 = 0,44,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la symétrie de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et la table donnant la fonction de répartition de cette loi. Finalement, le nombre de conscrits parmi les 1000 dont le Q.I. est compris entre 0,8 et 1,3 est :

$$N_1 = 1000 \times 0,44 = 440.$$

(b) Le nombre N_2 de conscrits dont le Q.I. est extérieur à l'intervalle $[0,5;1,3]$ parmi les 1000 n'est autre que 1000 fois la proportion théorique de Q.I. extérieurs à l'intervalle $[0,5;1,3]$. Celle-ci est donnée théoriquement par $\mathbf{P}[X \notin [0,5;1,3]]$. On a :

$$\begin{aligned}X \notin [0,5;1,3] &\Longleftrightarrow X < 0,5 \text{ ou } X > 1,3\\ &\Longleftrightarrow X - 0,9 < -0,4 \text{ ou } X - 0,9 > 0,4\\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X-0,9}{0,4} < -1 \text{ ou } Z = \frac{X-0,9}{0,4} > 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X \notin [0,5;1,3]] &= \mathbf{P}[Z < -1 \text{ ou } Z > 1]\\ &= \mathbf{P}[Z < -1] + \mathbf{P}[Z > 1]\\ &= \mathbf{P}[Z \leq -1] + 1 - \mathbf{P}[Z \leq 1]\\ &= 1 - \mathbf{P}[Z \leq 1] + 1 - \mathbf{P}[Z \leq 1]\\ &= 2(1 - \mathbf{P}[Z \leq 1])\\ &= 2(1 - 0,8413) = 0,3174.\end{aligned}$$

Finalement, le nombre de conscrits parmi les 1000 dont le Q.I. est compris entre 0,8 et 1,3 est :

$$N_2 = 1000 \times 0,3174 \simeq 317.$$

2. (a) Puisque les conscrits ayant un Q.I. situé dans le premier décile sont orientés vers les E.O.R., on cherche un réel x tel que $\mathbf{P}[X \geq x] = 0,1$ ou de manière équivalente tel que :

$$\mathbf{P}\left[Z \geq \frac{x-0,9}{0,4}\right] = 0,1.$$

La table dite « de l'écart réduit » utilisée avec $\beta = 0,2$ $(\beta/2 = 0,1)$ assure que :

$$\mathbf{P}\left[Z \geq 1,282\right] = 0,1 = \frac{\beta}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{x-0,9}{0,4} = 1,282$$

et le Q.I. limite pour aller aux E.O.R. est de

$$x = 0,4 \times 1,282 + 0,9 = 1,4128.$$

(b) Puisque les conscrits ayant un Q.I. situé dans les deux derniers déciles sont réformés, on cherche un réel x tel que $\mathbf{P}[X \leq x] = 0,2$ ou de manière équivalente tel que :

$$\mathbf{P}\left[Z \leq \frac{x - 0,9}{0,4}\right] = 0,2.$$

La table dite « de l'écart réduit » utilisée avec $\beta = 0,4$ ($\beta/2 = 0,2$) assure que :

$$\mathbf{P}\left[Z \leq -0,842\right] = 0,2 = \frac{\beta}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{x - 0,9}{0,4} = -0,842$$

et le Q.I. limite pour être réformé est de

$$x = -0,4 \times 0,842 + 0,9 = 0,5632.$$

Question de cours

Si $X_1,\ X_2, ...,\ X_k$ sont k variables aléatoires normales indépendantes deux à deux et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k$ k nombres réels, alors la variable aléatoire $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k$ suit une loi normale d'espérance

$$\mathbf{E}[Y] = \alpha_1 \mathbf{E}[X_1] + \alpha_2 \mathbf{E}[X_2] + ... + \alpha_k \mathbf{E}[X_k]$$

et de variance

$$\mathbf{V}[Y] = \alpha_1^2 \mathbf{V}[X_1] + \alpha_2^2 \mathbf{V}[X_2] + ... + \alpha_k^2 \mathbf{V}[X_k].$$

Exercice 3

On sait que $X_A \sim \mathcal{N}(60; 6)$ et $X_B \sim \mathcal{N}(45; 8)$.

1. La v.a. $Z = \frac{X_A - 60}{6}$ suit une loi normale centrée réduite.
   On a :

$$\begin{aligned} X_A < 69 &\Longleftrightarrow X_A - 60 < 9 \\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X_A - 60}{6} < 1,5 \end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_A < 69] &= \mathbf{P}[Z < 1,5] = \mathbf{P}[Z \leq 1,5] \\ &= 0,9332. \end{aligned}$$

   On a :

$$\begin{aligned} X_A > 75 &\Longleftrightarrow X_A - 60 > 15 \\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X_A - 60}{6} > 2,5 \end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_A > 75] &= \mathbf{P}[Z > 2,5] = 1 - \mathbf{P}[Z \leq 2,5] \\ &= 1 - 0,9938 = 0,0062. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} X_A < 45 &\Longleftrightarrow X_A - 60 < -15 \\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X_A - 60}{6} < -2,5 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_A < 45] = \mathbf{P}[Z < -2,5] = 1 - \mathbf{P}[Z \leq 2,5] \\ = 1 - 0,9938 = 0,0062. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} 45 < X_A < 50 &\Longleftrightarrow -15 < X_A - 60 < -10 \\ &\Longleftrightarrow -2,5 < Z = \frac{X_A - 60}{6} < -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[45 < X_A < 50] &= \mathbf{P}\left[-2,5 < Z < -\frac{5}{3}\right] = \mathbf{P}\left[Z < -\frac{5}{3}\right] - \mathbf{P}[Z \leq -2,5] \\ &= \mathbf{P}\left[Z \leq -\frac{5}{3}\right] - 0,0062 = 1 - \mathbf{P}\left[Z \leq \frac{5}{3}\right] - 0,0062 \\ &= 0,9938 - \mathbf{P}\left[Z \leq \frac{5}{3}\right]. \end{aligned}$$

La valeur de $\mathbf{P}\left[Z \leq \frac{5}{3}\right]$ n'est pas donnée dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et nous devons utiliser la méthode de l'interpolation linéaire pour en trouver une valeur approchée α précise.
On a :

$$1,66 < \frac{5}{3} \simeq 1,666 < 1,67$$

donc

$$\mathbf{P}[Z \leq 1,66] < \mathbf{P}\left[Z \leq \frac{5}{3}\right] < \mathbf{P}[Z \leq 1,67]$$

donc

$$0,9515 < \alpha < 0,9515.$$

On en déduit que :

$$\frac{\alpha - 0,9515}{0,9525 - 0,9515} = \frac{\frac{5}{3} - 1,66}{1,67 - 1,66}$$

d'où

$$\alpha = \frac{\frac{5}{3} - 1,66}{0,01} \times 0,001 + 0,9515 \simeq 0,9522$$

et

$$\mathbf{P}[45 < X_A < 50] \simeq 0,9938 - 0,9522 = 0,0416.$$

2. La v.a. $Z = \frac{X_B - 45}{8}$ suit une loi normale centrée réduite.
   On a :

$$\begin{aligned} X_B < 60 &\Longleftrightarrow X_B - 45 < 15 \\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X_B - 45}{8} < \frac{15}{8} \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{P}[X_B < 60] = \mathbf{P}\left[Z < \frac{15}{8}\right] = \mathbf{P}\left[Z \leq \frac{15}{8}\right].$$

La valeur de $\mathbf{P}\left[Z \leq \frac{15}{8}\right]$ n'est pas donnée dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et nous devons utiliser la méthode de l'interpolation linéaire pour en trouver une valeur approchée α précise.
On a :

$$1,87 < \frac{15}{8} = 1,875 < 1,88$$

donc

$$\mathbf{P}[Z \leq 1,87] < \mathbf{P}\left[Z \leq \frac{15}{8}\right] < \mathbf{P}[Z \leq 1,88]$$

donc

$$0,9693 < \alpha < 0,9699.$$

On en déduit que :

$$\frac{\alpha - 0,9693}{0,9699 - 0,9693} = \frac{1,875 - 1,87}{1,88 - 1,87}$$

d'où

$$\alpha = \frac{0,005}{0,01} \times 0,006 + 0,9693 = 0,9696$$

et

$$\mathbf{P}[X_B < 60] \simeq 0,9696.$$

On a :

$$\begin{aligned} X_B > 40 &\Longleftrightarrow X_B - 45 > -5 \\ &\Longleftrightarrow Z = \frac{X_B - 45}{8} > -\frac{5}{8} = -0,625 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{P}[X_B > 40] = \mathbf{P}\left[Z > -0,625\right] = 1 - \mathbf{P}\left[Z \leq -0,625\right] = \mathbf{P}\left[Z \leq 0,625\right].$$

La valeur de $\mathbf{P}\left[Z \leq 0,625\right]$ n'est pas donnée dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et nous devons utiliser la méthode de l'interpolation linéaire pour en trouver une valeur approchée α précise.
On a :

$$0,62 < 0,625 < 0,63$$

donc

$$\mathbf{P}[Z \leq 0,62] < \mathbf{P}\left[Z \leq 0,625\right] < \mathbf{P}[Z \leq 0,63]$$

donc

$$0,7324 < \alpha < 0,7357.$$

On en déduit que :

$$\frac{\alpha - 0,7324}{0,7357 - 0,7324} = \frac{0,625 - 0,62}{0,63 - 0,62}$$

d'où

$$\alpha = \frac{0,005}{0,01} \times 0,0033 + 0,7324 = 0,7340$$

et

$$\mathbf{P}[X_B > 40] \simeq 0,7340.$$

3. On pose $Y = X_A - X_B$.

(a) On a :

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X_A - X_B] = \mathbf{E}[X_A] - \mathbf{E}[X_B] = 60 - 45 = 15.$$

Les v.a. X_A et X_B étant indépendantes (le temps mis par un ouvrier pour fabriquer une unité ne dépend pas du temps mis par l'autre ouvrier pour fabriquer une unité), on a de plus :

$$\mathbf{V}[Y] = \mathbf{V}[X_A - X_B] = \mathbf{V}[X_A] + \mathbf{V}[X_B] = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

(b) La v.a. Y s'écrivant comme combinaison linéaire de v.a. normales indépendantes, la loi de Y est une loi normale. On déduit de la question précédente ses paramètres :

$$Y \sim \mathcal{N}(15; 10).$$

(c) Puisque A et B commencent leur travail au même instant, la probabilité pour que A termine avant B la première unité produite n'est autre que la probabilité pour que $X_A < X_B$, soit encore la probabilité pour que $Y = X_A - X_B < 0$. La v.a. $Z = \frac{Y-15}{10}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et on a :

$$\begin{aligned} Y < 0 &\iff Y - 15 < -15 \\ &\iff Z = \frac{Y - 15}{10} < -1,5. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Y < 0] &= \mathbf{P}[Z < -1,5] \\ &= 1 - \mathbf{P}[Z \leq 1,5] \\ &= 1 - 0,9332 = 0,0668. \end{aligned}$$

La probabilité pour que A termine avant B la première unité produite est de $0,0668$.