

## Devoir à la Maison de Mathématiques

### Notes :

- *Le devoir est à rendre durant la séance de TD du 25 février 2016. Passée cette date, une pénalité de 2 points par jour de retard sera appliquée.*
- *Une rédaction claire et détaillée sera appréciée et prise en compte dans la notation. Les réponses doivent être justifiées précisément.*

**Problème :** Une rumeur affirme que le distributeur de café situé dans la gare de la ville de Triches (au sud de Belluno en Italie), délivre des cafés dont le volume est inférieur à celui annoncé, c'est-à-dire 10cl. On se propose de réaliser une étude statistique pour infirmer ou confirmer cette rumeur.

Partie A : On s'intéresse dans un premier temps au volume moyen  $m$  de café versé dans un gobelet. Pour cela, on a prélevé un échantillon de 50 cafés issus de ce distributeur et mesuré la quantité de café qu'ils contenaient. On a observé une moyenne de 9,7cl et un écart-type de 1cl.

1. Déterminer un intervalle centré en la moyenne observée contenant  $m$  avec probabilité 0,95 puis 0,99.
2. Peut-on affirmer au risque de 5% que la quantité de café moyenne distribuée est inférieure à celle annoncée ? Même question au risque de 1%. Commenter.
3. En supposant que l'on observe les mêmes moyenne et écart-type, déterminer la taille minimale que doit avoir l'échantillon pour confirmer la rumeur au risque de 1%.

Partie B : On s'intéresse, cette fois, à la proportion  $p$  de gobelets contenant un volume de café inférieur à celui annoncé. On a prélevé 200 gobelets et observé que 116 d'entre eux contenaient strictement moins de 10cl. On cherche à savoir si plus de la moitié des cafés distribués ont un volume inférieur à celui annoncé.

1. Déterminer un intervalle centré en la proportion observée contenant  $p$  avec probabilité 0,9 puis 0,99.
2. Conclure au risque de 10% puis 1%.

Partie C : On dispose, cette fois, d'un échantillon de seulement cinq cafés. Pour  $i = 1, \dots, 5$ , on note  $Y_i$  la variable aléatoire valant 1 si le  $i$ ème café a un volume strictement inférieur à 10cl et 0 sinon. On suppose que les volumes de cafés distribués durant différentes utilisations de la machine sont indépendants. On suppose également qu'en observant la totalité des cafés distribués par la machine exactement la moitié d'entre eux ont un volume strictement inférieur à 10cl.

1. Donner la loi de  $Y_i$ . En déduire la loi du nombre  $N$  de cafés d'un échantillon de 5 cafés dont le volume est inférieur à 10cl.
2. Calculer la probabilité pour que, dans un échantillon de 5 cafés, au moins 58% des cafés aient un volume strictement inférieur à 10cl. Commenter.