Analyse à une variable réelle (exercices supplémentaires)

Exercice 1 Déterminer l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

1. $3x^2 + \frac{27}{2}x - \frac{15}{2} = 0$,
2. $4x^2 - 2x + 7 = 0$,
3. $5x^2 + 15x + \frac{45}{4} = 0$,
4. $(2x-1)(x+3) \geq 0$,
5. $-x^2 + x - 1 < 0$,
6. $2x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{2}{15} \leq 0$.

Exercice 2

Déterminer les ensemble de définition, dérivée et dérivée seconde des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f_1(x) = 5x^3 + 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2$,
2. $f_2(x) = \frac{3x^2-2x+5}{x^4-6x^2+2}$,
3. $f_3(x) = \exp(2x^2 - 3x + 4)$,
4. $f_4(x) = \ln(2x^2 - 7x + 3)$,
5. $f_5(x) = \sqrt{4x^2 + 3x - 400}$,
6. $f_6(x) = \exp(x)\ln(x)$.

Exercice 3

Étudier les extrema des fonctions définies par les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = -3x^2 + 10x - 12$,
2. $f_2(x) = \ln(4x^3 - \frac{26}{5}x^2 + \frac{4}{5}x) + \frac{2}{5}$,
3. $f_3(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 6}$.

Exercice 4

Étudier la convexité/concavité des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f_1(x) = \exp(2x)$,
2. $f_2(x) = \ln(x)$
3. $f_3(x) = \exp(3x^2 + 4x - 1)$
4. $f_4(x) = \sqrt{x}$
5. $f_5(x) = \exp(-x^2)$.

Exercice 5

Donner les domaines de définition et de dérivabilité de chacune des fonctions définies ci-dessous puis calculer leurs dérivées.

1. $f_1(x) = \frac{2x+7}{x+1}$;
2. $f_2(x) = \ln(2x+7)$;
3. $f_3(x) = \exp(3x)^2$;
4. $f_4(x) = \frac{\ln(x)}{\exp(x)}$.

Exercice 6

Étudier les variations et préciser les éventuels extrema de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{2x - 3}.$$

Exercice 7

Étudier les variations et préciser les éventuels extrema de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 6x + 9}{8}\right).$$

Exercice 8

Une entreprise produit un article dont le coût de fabrication unitaire est de 26€. D'autre part, les coûts fixes de production sont de 2000€ par semaine. Une étude à montré que si le prix de vente est de x€, la demande est de $8000 - 20x$.

Déterminer le prix de vente permettant de maximiser le bénéfice hebdomadaire de l'entreprise, ainsi que le montant de ce bénéfice. Commenter.

Exercice 9

Déterminer les développements limités à l'ordre 2 des fonctions définies par les expressions suivantes au voisinage de x_0.

1. $f(x) = \exp(x \ln(x))$ pour $x_0 = 1$,
2. $g(x) = \sqrt{2 - 3x}$ pour $x_0 = \frac{1}{2}$,
3. $h(x) = \ln(1 + x^2)$ pour $x_0 = 0$.

Exercice 10

La fonction de demande d'un article est donnée par $f(x) = \frac{1}{x^2+x+3}$ pour un prix de vente $x \in \mathbf{R}_+$.

1. Étudier les variations de la fonction demande.
2. Déterminer l'élasticité instantanée $\mathcal{E}_f(x)$ de la fonction demande en tout point $x \in \mathbf{R}_+$.
3. Étudier les variations de la fonction $\mathcal{E}_f(\cdot)$.
4. Déterminer la limite de l'élasticité lorsque le prix tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.