Variables aléatoires discrètes (Exercices complémentaires)

Exercice 1

Un jeu de loto consiste en le tirage simultané de 7 boules parmi 20, numérotées de 1 à 20. Une grille comportant 7 numéros est vendue 3€. Les gains possibles sont les suivants :
- 3 bons numéros : 3€,
- 4 bons numéros : 30€,
- 5 bons numéros : 300€,
- 6 bons numéros : 3000€,
- 7 bons numéros : 30000€.

On note X la variable aléatoire donnant le gain **net** obtenu avec une grille.

1. Quel est le support de X
2. Déterminer la loi de X.
3. Quel gain moyen un joueur régulier peut-il espérer réaliser lors d'un pari ?
4. Un joueur parie une grille chaque semaine. On note N le numéro de la semaine durant laquelle à lieu le premier gain. Quelle est la loi de N ?

Exercice 2

Un voyageur fraude systématiquement en empruntant le train. Il réalise 10 voyages par semaine. Le billet est vendu 20 euro l'unité et, en cas de non présentation du billet lors d'un contrôle, la contravention est de 90 euros. Une proportion p des trains est contrôlée. Le choix des trains contrôlés est fait aléatoirement et indépendament.

1. On note N le nombre de contraventions que le voyageur reçoit en une semaine. Quelle est la loi de N ? (justifier)
2. Déterminer pour quelles valeurs de p le voyageur peut espérer être gagnant en fraudant systématiquement.

Exercice 3

Du 01/01/1960 au 31/12/2019, on a recensé 15 accidents nucléaires (de gravité variable) dans les centrales électriques dans le monde. On note X le nombre d'accidents nucléaires qui surviendront dans les centrales électriques durant la décénie allant du 01/01/2020 au 31/12/2019. On suppose pour simplifier que le parc nucléaire n'a pas évolué (tant en quantité qu'en qualité ou en exploitation) et que les accidents surviennent au hasard.

1. Quel est le support de X ?
2. Quelle est la loi de X ?
3. Avec quelle probabilité aucun accident nucléaire n'aura lieu au cours de cette décénie ?
4. Avec quelle probabilité strictement plus de 2 accidents nucléaires auront lieu au cours de cette décénie.

Exercice 4

Une puce saute d'un centimètre sur sa droite avec probabilité p et sur sa gauche avec probabilité $1-p$. On note X_n la variable aléatoire vallant 1 si la puce a sauté sur sa droite et -1 si elle a sauté sur sa gauche. On suppose ses déplacements indépendants.

1. Que représente la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_n+1}{2}$?
3. On pose $B_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Quelle est la loi de la variable aléatoire B_n ?
4. Écrire une relation reliant S_n et B_n.
5. Après n sauts quelle est la position moyenne de la puce relativement à son point de départ ?
6. La puce peut-elle être revenue à son point de départ après un nombre impair de sauts ? (Justifier).
7. Exprimer la probabilité pour que la puce se trouve à son point de départ après $n = 2k$ sauts.

Exercice 5

Un bandit-manchot comporte 3 trois rouleaux sur chacun desquels figurent 18 symboles différents (les mêmes sur chaque rouleau). Lorsqu'un joueur actionne le bras de cette machine à sous une des combinaisons possibles est sélectionnée uniformément au hasard parmi toutes les combinaisons possibles. La partie coûte 0,50€. Les combinaisons gagnantes sont celles décrites sur l'image ci-dessous. L'expression « any two » (resp. « any one ») signifie que la combinaison tirée contient exactement deux fois le symbole quelques en soient les places (resp. une fois le symbole quelque en soit la place). Les gains indiqués sont en euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain (brut) d'un joueur lors d'une partie.

1. Combien y a-t-il de combinaisons équiprobables possibles ? (1 point)
2. Combien y a-t-il de combinaisons correspondant au cas « any one » ? (1 point)
3. Combien y a-t-il de combinaisons correspondant au cas « any two » ? (1 point)
4. Quel est le support de X ? (1 point)
5. Déterminer la loi de X. (1 point)
6. Si un joueur réalise un grand nombre de parties, quel gain (brut) moyen peut-il espérer faire par partie ? Expliquez. (2 points)
7. En déduire le gain net moyen par partie d'un joueur compulsif. (1 point)

Exercice 6

Chaque année, entre le 9 et le 13 août, la Terre traverse les Perséides. Il s'agit d'un essaim de météores constitué de très nombreux débris de la comète Swift-Tuttle. Chacun de ces météores peut, en entrant dans l'atmosphère, donner lieu à un phènomène lumineux bien connu : une étoile filante. Il est connu que durant cette période, on peut observer en moyenne 100 étoiles filantes par heure.

On note Y le nombre d'étoiles filantes que l'on pourra observer le 10 août 2020 entre 1h et 1h05 du matin.

1. Quelles est la loi de Y ?
2. Quelle est la probabilité d'observer au moins 10 étoiles filantes durant ces cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité d'observer entre 5 et 10 étoiles filantes durant ces cinq minutes ?