Chapitre 4: Généralités sur les fonctions, quelques fonctions usuelles et méthodes de résolution d'équations

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2022-2023
Semestre 1

Fonction, domainde de définition, image, ...

Définition

Une fonction (réelle) f associe à tout nombre réel x appartenant à un certain ensemble D_f, appelé ensemble de définition de f, un nombre réel $f(x)$, appelé image de x par f ou valeur de la fonction f en x.

Remarque

Si la fonction f admet une formulation explicite, son domaine de définition est l'ensemble des réels pour lesquels cette expression est calculable.

Exemple

1. $f(x) = 2x + 1$ *est définie sur* $\mathbf{R}$ ($D_f = \mathbf{R}$).
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ *admet pour domaine de définition* $D_g = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
   $\rightsquigarrow$ *on ne peut pas diviser par 0.*

Monotonie

Définition

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$.
Si, pour tous $x, y \in I$ avec $x < y$

1. $f(x) \leq f(y)$, *on dit que f est croissante sur I,*
2. $f(x) < f(y)$, *on dit que f est strictement croissante sur I,*
3. $f(x) \geq f(y)$, *on dit que f est décroissante sur I,*
4. $f(x) > f(y)$, *on dit que f est strictement décroissante sur I.*

Exemple (suite)

1. $f(x) = 2x + 1$ *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ *et la fonction g, de ce même exemple, est strictement décroissante sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$ *(mais pas sur* $\mathbf{R}^*$ *!).*

Composée et réciproque

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement telles que f prenne ses valeurs dans un ensemble $E \subset D_g$.
On appelle composée de f par g la fonction $g \circ f$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \text{pour tout } x \in D_f.$$

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement.
On dit que f et g sont réciproques l'une de l'autre si

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \text{pour tout } x \in D_f \quad \text{et} \quad (f \circ g)(y) = y, \quad \text{pour tout } y \in D_g.$$

On note alors $g = f^{-1}$.

Composée et réciproque

Remarque

1. *Certaines fonctions n'admettent pas de réciproque.*
   Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2$ *n'admet pas de réciproque sur* $\mathbf{R}$ *; par contre, sa restriction à* $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty[$ *admet pour réciproque la fonction racine carrée* $y \longmapsto \sqrt{y}$.
2. *Si une fonction est strictement monotone alors elle admet une réciproque.*
3. *Si* f *et* g *sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$.

Exemple (suite)

1. $f(x) = 2x + 1$ *admet pour réciproque la fonction définie par* $h(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.
   En effet, ces deux fonction sont définies sur $\mathbf{R}$ *et on a pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$ *:*
   $$(h \circ f)(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x \quad \text{et} \quad (f \circ h)(y) = 2\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) + 1 = y.$$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ *est sa propre réciproque.*

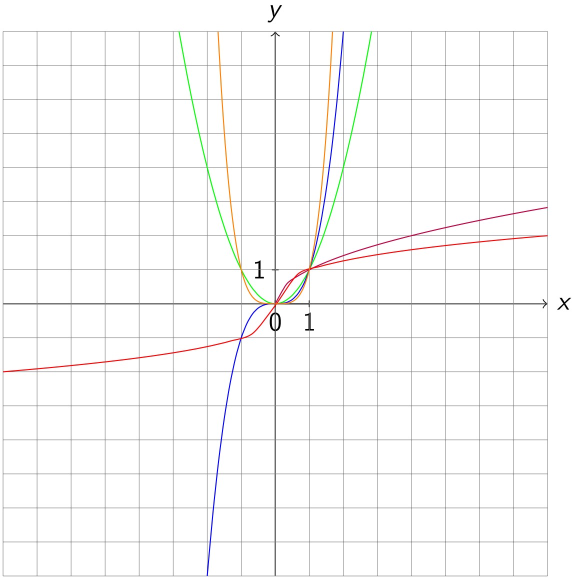
Fonctions puissances et racines

Définition et propriétés

$$x \longmapsto x^k$$

- $k \in \mathbf{N}^*$ pair :
  - strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et décroissante sur $\mathbf{R}_-$
  - image de $\mathbf{R}_+$ par cette fonction est $\mathbf{R}_+$ lui-même
  - Réciproque sur $\mathbf{R}_+$: racine k^{e} $\sqrt[k]{\cdot}$ ou $\cdot^{\frac{1}{k}}$.
- $k \in \mathbf{N}^*$ impair :
  - strictement croissante sur $\mathbf{R}$
  - image de $\mathbf{R}$ par cette fonction est $\mathbf{R}$ lui-même
  - Réciproque sur $\mathbf{R}$: racine k^{e} $\sqrt[k]{\cdot}$ ou $\cdot^{\frac{1}{k}}$.

Graphes de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto x^4$



Valeur absolue

Définition

On appelle (fonction) valeur absolue la fonction notée $|\cdot|$ *et définie sur* $\mathbf{R}$ *par :*

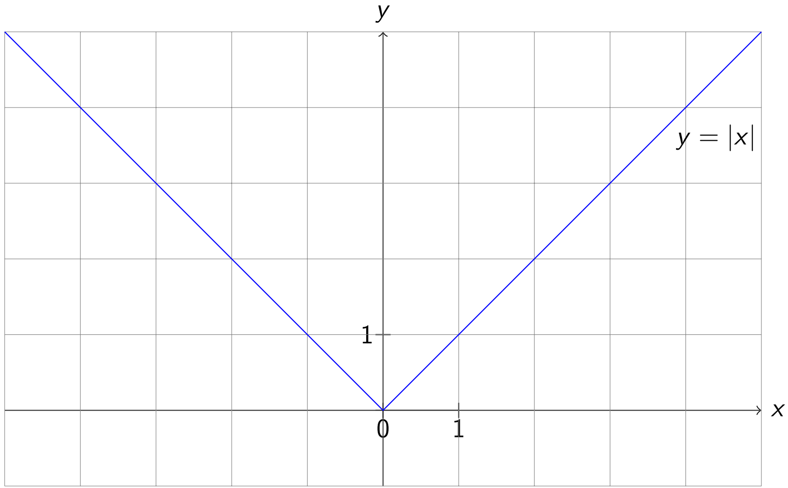
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} .$$

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tous $x, y \in \mathbf{R}$*, on a :*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Graphe de la fonction valeur absolue



Fonctions linéaires et affines

Définition

On appelle fonction linéaire toute fonction f s'écrivant sous la forme

$$f(x) = ax, \qquad \text{pour un certain } a \in \mathbf{R}.$$

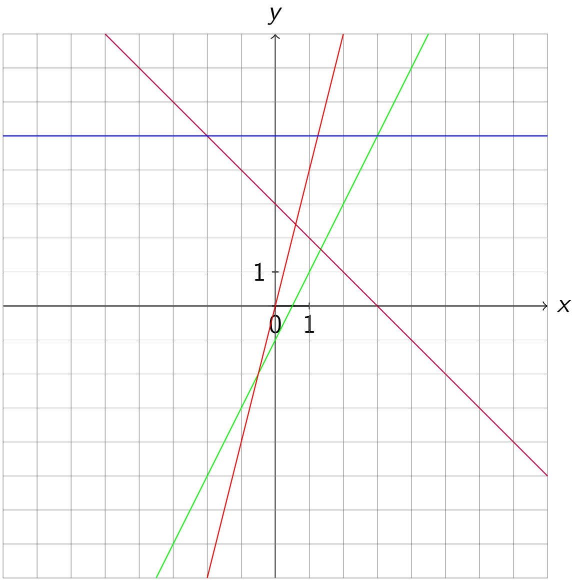
On appelle fonction affine toute fonction f s'écrivant sous la forme

$$f(x) = ax + b, \qquad \text{pour certains } a, b \in \mathbf{R}.$$

Remarque

1. *Si une fonction est linéaire, elle est en particulier affine.*
2. *Une fonction affine est strictement croissante si, et seulement si, $a > 0$ et est strictement décroissante si, et seulement si, $a < 0$. Elle est constante si $a = 0$.*
3. *Le graphe d'une fonction affine est une droite dont le coefficient directeur est a et l'ordonnée à l'origine b.*

Graphes de $x \mapsto 2x-1$, $x \mapsto -x+3$, $x \mapsto 4x$ et $x \mapsto 5$



Fonctions quadratiques

Définition

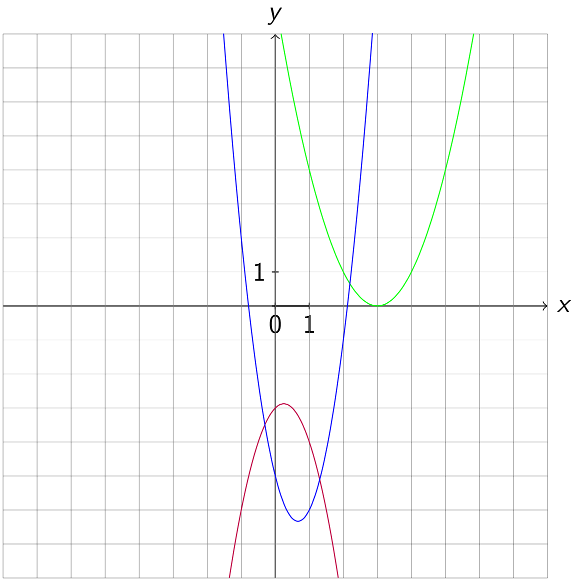
On appelle fonction quadratique toute fonction f s'exprimant sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{avec } a \in \mathbf{R}^* \text{ et } b, c \in \mathbf{R}.$$

Remarque

1. *Définie sur* $\mathbf{R}$.
2. *Fonction quadratique : polynôme de degré 2.*
3. *Courbe représentative : parabole dont les branches sont orientées vers le*
   - *haut si* $a > 0$
   - *bas si* $a < 0$.
4. *Symétrique par rapport à la droite d'équation* $x = \frac{-b}{2a}$.
5. *Minimum (resp. maximum) global en* $x = \frac{-b}{2a}$ *si* $a > 0$ *(resp.* $a < 0$*).*

Graphes de $x \mapsto x^2 - 6x + 9$, $x \mapsto -2x^2 + x - 3$ et $x \mapsto 3x^2 - 4x - 5$



Fonctions quadratiques - discriminant et factorisation

Discriminant du polynôme de degré 2 $ax^2 + bx + c$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Proposition

1. *Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines simples :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et se factorise comme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. *Si $\Delta = 0$, alors f admet une racine double :*

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

et se factorise comme $f(x) = a(x - x_1)^2$.

3. *Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine.*

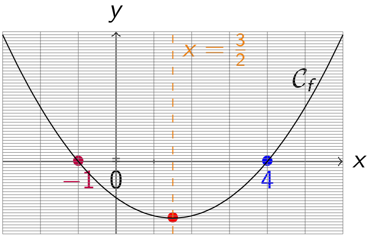
Un exemple : $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$

Branches : Orientées vers le haut
Axe de symétrie : $x = \frac{3}{2}$
Minimum global : $-18,75$ en $\frac{3}{2}$
Discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2 > 0.$$

Racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - 15}{2 \times 3} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + 15}{2 \times 3} = 4.$$



Fonctions polynomiales

Définition

On appelle fonction polynomiale, ou simplement polynôme, de degré $n \in \mathbf{N}^*$ toute fonction f s'écrivant sous la forme :

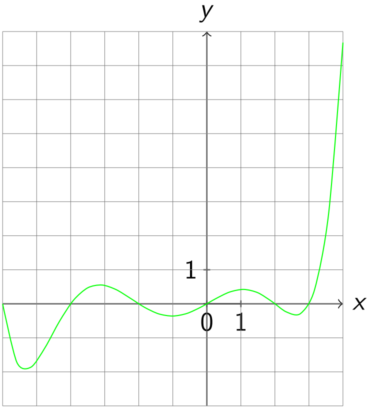
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \in \mathbf{R}^*$ et $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}$.

Remarque

1. *Définie sur $\mathbf{R}$.*
2. *Toute fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines.*
3. *Factorisable en polynômes de degrés 1 et/ou 2.*

Graphe de $x \longmapsto \frac{1}{500}x^6 + \frac{7}{500}x^5 - \frac{1}{50}x^4 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{125}x^2 + \frac{72}{125}x$



Fractions rationnelles

fonction (fraction) rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes.

Domaine de définition

$$D_f = \{x \in \mathbf{R} : \ Q(x) \neq 0\}\,.$$

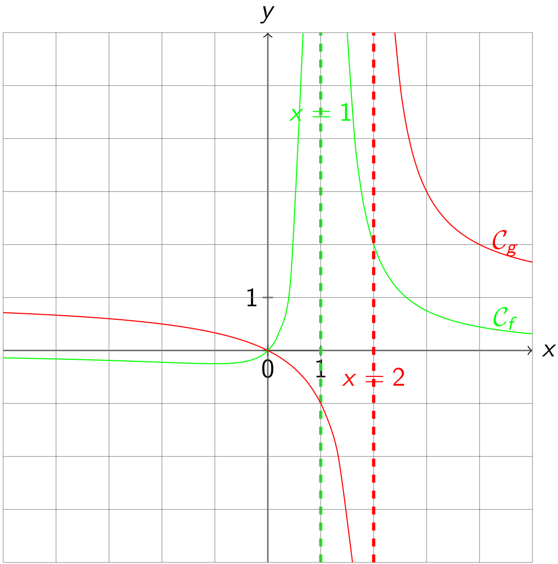
Exemple

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

Domaine de définition :

$$D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : \ x^2 - 2x + 1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbf{R} : \ (x-1)^2 \neq 0\right\} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

Graphes de $f : x \longmapsto \frac{x}{x^2-2x+1}$ et $g : x \longmapsto \frac{x}{x-2}$



Fonction exponentielle (à base $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2,7182818$)

Définition-Théorème

Il existe une unique fonction continue $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}_+^*$ valant e en 1 et vérifiant :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbf{R}.$$

Cette fonction est appelée exponentielle et est notée $\exp(\cdot)$ *ou* $e^{\cdot}$.

Proposition

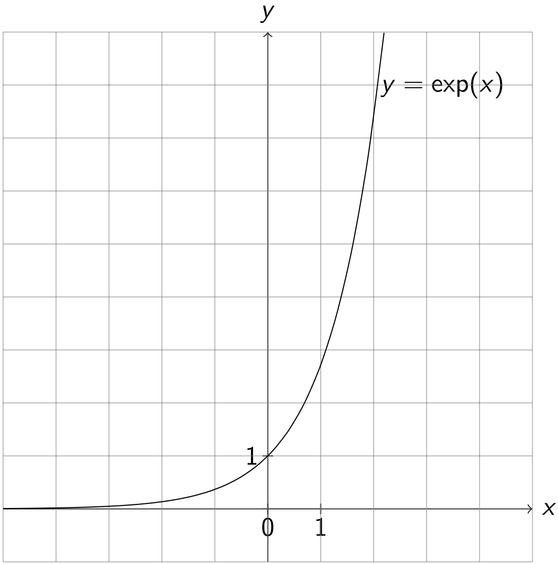
1. $\exp$ *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$ *et l'image de* $\mathbf{R}$ *par* $\exp$ *est* $\mathbf{R}_+^*$.
2. *On a, pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$ *:*

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{et} \quad \exp(xy) = (\exp(x))^y.$$

et par défintion $x, y \in \mathbf{R}$ *:*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \text{d'où} \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Graphe de la fonction exponentielle



Logarithme népérien

Définition-Théorème

La fonction exp *admet une fonction réciproque définie sur* $\mathbf{R}_+^*$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$. *Cette fonction est appellée logarithme népérien et est notée* $\ln(\cdot)$.

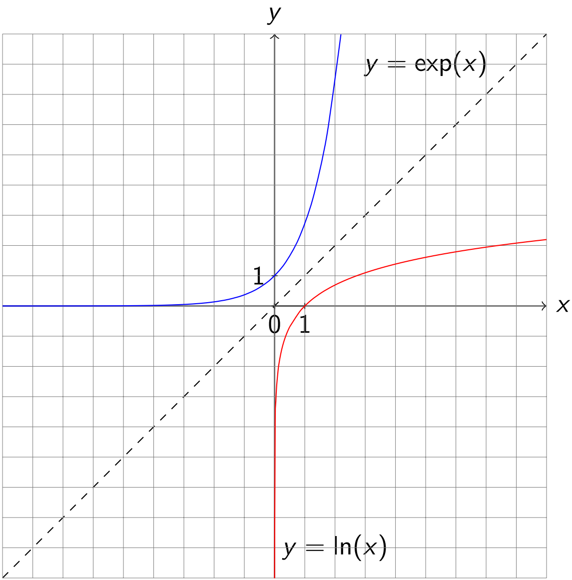
Remarque

En d'autres termes, ln *est la fonction telle que pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *et tout* $y \in \mathbf{R}_+^*$:

$$y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

En particulier, $\ln(x) = 0$ *si, et seulement si,* $x = 1$.

Graphes des fonctions logarithme népérien et exponentielle



Propriétés du logarithme népérien

Proposition

1. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$.
2. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$
3. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, *on a :*
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$
4. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *et tout* $p \in \mathbf{R}$, *on a :*
$$\ln\left(x^p\right) = p\ln(x).$$

Une utilisation du logarithme en mathématiques financières

Remarque

Les points 1. et 4. de la proposition précédente sont particulièrement utiles en mathématiques financières pour la résolution déquations ou inéquations en n du type $a^n = b$, $a^n \geq b$ ou $a^n \leq b$.

Par exemple, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} 3^n \geq 1000 &\Longleftrightarrow \ln\left(3^n\right) \geq \ln(1000) \quad \textit{(car } \ln \textit{ est croissante, point 1.)} \\ &\Longleftrightarrow n\ln(3) \geq \ln(1000) \quad \textit{(par le point 4.)} \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \simeq 6,29 \quad \textit{(car } \ln(3) > 0\textit{).} \end{aligned}$$

Exponentielles et logarithmes à base $a > 0$

Exponentielle à base $a > 0$

$$\exp_a(x) = a^x := \exp\left(x \ln(a)\right).$$

Logarithme à base $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Remarque

- *Héritent des propriétés algébriques de* exp *et* ln.
- *Attention à la croissance/décroissance selon que $a > 1$ ou $a < 1$.*

Graphes de $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \log_2(x)$, $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x)$