Chapitre 1: Analyse à une variable réelle

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2023-2024
Semestre 2

Motivations et objectifs

- Fournir des outils permettant d'étudier des fonctions
  - elles peuvent provenir de la modélisation d'un problème concret

Exemple (bénéfice)

Un industriel est seul à fabriquer un produit spécifique et est assuré de vendre toute sa production.
Coût de fabrication x unités en une semaine : $5x^2 + 5x + 100$€
Prix de vente d'une unité : 85€
But : déterminer le nombre de produits à fabriquer pour maximiser son bénéfice hebdomadaire sur ce produit.
Bénéfice réalisé sur la vente de $x \geq 0$ *produits en une semaine :*

$$f(x) = 85x - (5x^2 + 5x + 100) = -5x^2 + 80x - 100, \qquad x \geq 0.$$

On aimerait donc pouvoir

1. déterminer les extrema d'une fonction
2. étudier ses variations

Quelques idées

- Si on connaît les variations de f, on arrivera à trouver ses extrema
- Si $f(x) = ax + b$, le signe du coefficient directeur a détermine la croissance ou la décroissance de f

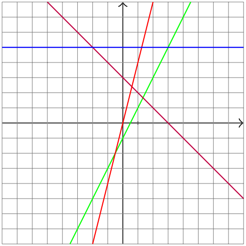
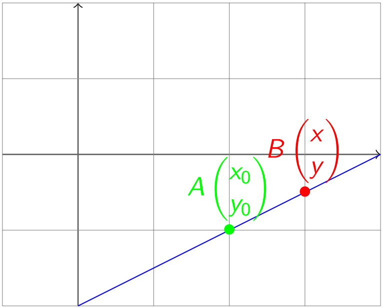


Figure – $x \mapsto 2x - 1$, $x \mapsto -x + 3$, $x \mapsto 4x$ et $x \mapsto 5$

Idée :

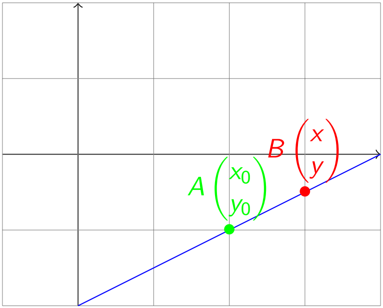
- pour une fonction f (assez) générique, en chaque point x_0 de D_f, trouver une droite approchant f convenablement autour de x_0 (ou, au moins, son coeff. directeur) et en déduire son sens de variation

Quelques idées



Coefficient directeur de la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

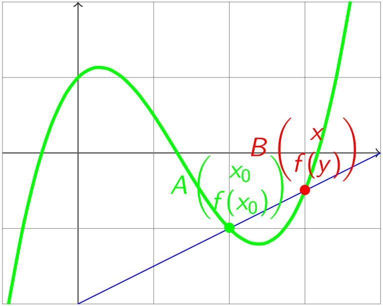
Quelques idées



Coefficient directeur de la droite passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

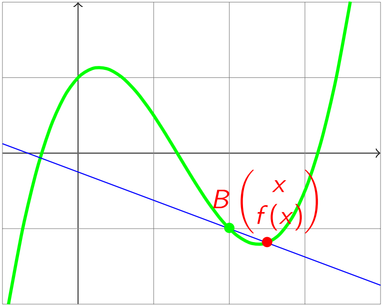
Quelques idées



Coefficient directeur de la droite passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x \\ f(y) \end{pmatrix}$:

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quelques idées

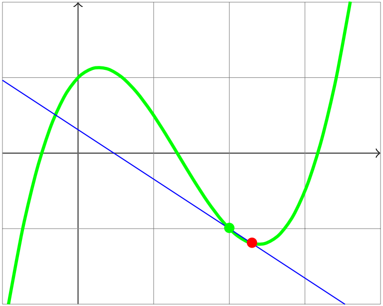


« Stabilisation » de

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si $x = x_0 + h$ s'approche de x_0 ?

Quelques idées

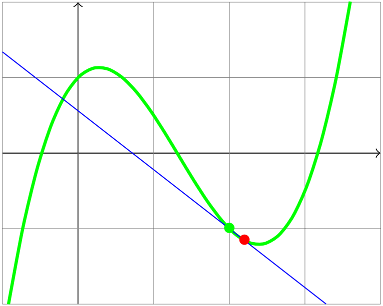


« Stabilisation » de

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si $x = x_0 + h$ s'approche de x_0 ?

Quelques idées

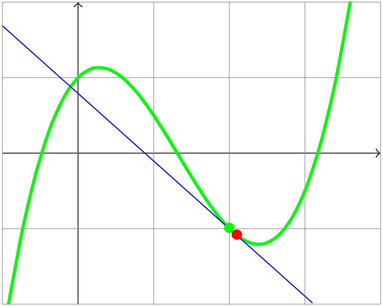


« Stabilisation » de

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si $x = x_0 + h$ s'approche de x_0 ?

Quelques idées

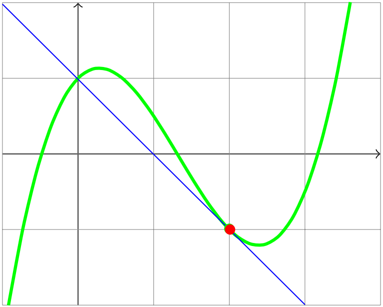


« Stabilisation » de

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si $x = x_0 + h$ s'approche de x_0 ?

Quelques idées



« Stabilisation » de

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si $x = x_0 + h$ s'approche de x_0 ?

Taux de variation, nombre dérivé, dérivée

Taux de variation de f en x_0

la fonction $\tau_f(x_0)$ définie, pour $|h|$ suffisamment petit, par :

$$(\tau_f(x_0))(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Nombre dérivé de f en x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (\tau_f(x_0))(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si cette limite existe et est finie.
On dit dans ce cas que f est dérivable en x_0.

Définition

On dit que f est dérivable sur $I \subset D_f$ si f est dérivable en tout point de I.
On appelle ensemble de dérivabilité de f le plus grand sous-ensemble D'_f de D_f sur lequel f est dérivable.
La fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ est appelée dérivée de f.

Dérivées usuelles

Fonction $f : x \mapsto f(x) =$	Domaine de définition D_f	Domaine de dérivabilité D'_f	Dérivée $f' : x \mapsto f'(x) =$
k constante	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	0
x^n, $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
x^α, $\alpha > 0$	$\mathbf{R}_+$	$\mathbf{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
x^α, $\alpha < 0$	$\mathbf{R}_+^*$	$\mathbf{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(x)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\ln\|x\|$	$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^*$	$\frac{1}{x}$

Opérations sur les dérivées

- $\alpha \in \mathbf{R}$, u dérivable en x : $(\alpha u)'(x) = \alpha u'(x)$
- u et v dérivables en x :

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) \quad \text{et} \quad (u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

- u et v dérivables en x et v telle que $v(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2};\ \text{en particulier,} \quad \left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

- w dérivable en x et v dérivable en $w(x)$:

$$(v \circ w)'(x) = w'(x)v'(w(x))$$

En particulier,

$$(\exp \circ w)'(x) = (\exp(w(x)))' = w'(x)\exp(w(x)),\ (w(x)^n))' = nw'(x)w(x)^{n-1}$$

et si de plus $w(x) > 0$,

$$(\ln \circ w)'(x) = (\ln(w(x)))' = \frac{w'(x)}{w(x)}$$

Exemples

1. La fonction $f : x \longmapsto x^2 \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \exp(x)$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \exp(x)$ donc :
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\exp(x) + x^2\exp(x) = x\,(x+2)\exp(x).$$

2. La fonction rationnelle $g : x \longmapsto \frac{x^3-1}{x-2}$ est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.
En posant $u(x) = x^3 - 1$ et $v(x) = x - 2$, on a $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$ donc :
$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3x^2(x-2) - (x^3-1)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 1}{(x-2)^2}.$$

3. La fonction $h : x \longmapsto \ln(x^2-1)$ est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
En posant $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \ln(x)$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc :
$$h'(x) = u'(x)v'\left(u(x)\right) = 2x \times \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Tangente à une courbe en un point

Tangente à la courbe représentative de f en x_0

Droite d'équation :

$$\mathrm{T}_{f,x_0} : \; y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

si f est dérivable en x_0.

Remarque

Meilleure approximation locale de f par une fonction affine au voisinage de x_0.

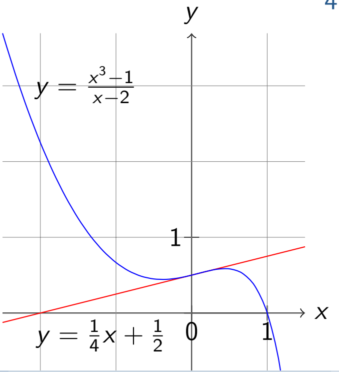
Exemple

Reprenons la fonction $g : x \longmapsto \frac{x^3-1}{x-2}$ de l'Exemple précédant. On a

$$g'(0) = \frac{2 \times 0^3 - 6 \times 0^2 + 1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad g(0) = \frac{0^3 - 1}{0 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 :

$$\mathrm{T}_{g,0} : y = g'(0)(x-0) + g(x_0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$



Applications à l'étude des variations et à la recherche d'extrema

Proposition

Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
Si l'inégalité est **stricte** *sauf en un nombre* **fini** *de points, alors f est* **strictement** *croissante (resp.* **strictement** *décroissante) sur I.*

Proposition

Soit f une fonction dérivable au voisinage d'un point intérieur x_0 de D_f.
Pour que f admette un extremum local en x_0, il est nécessaire que $f'(x_0) = 0$.

Pour monter que l'on a effectivement un minimum ou maximum, on pourra étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f contenant :

- les bornes du domaine de définition de la fonction (une double barre est placée sous les valeurs interdites),
- le signe de la dérivée de cette fonction,
- les variations de la fonction, au moyen de flèches, et les valeurs des extrema locaux et limites au bord du domaine de définition de la fonction.

Exemple (bénéfice, suite)

Rappelons que l'industriel souhaite déterminer le nombre $x \geq 0$ de produits à fabriquer pour maximiser le bénéfice hebdo. réalisé sur la vente de ceux-ci donné par :

$$f(x) = -5x^2 + 80x - 100, \qquad x \geq 0.$$

On a :

$$f'(x) = -10x + 80.$$

x	0		8		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	220	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, la quantité optimale à produire est de 8 unités par semaine et le bénéfice maximal est de 220€.

Dérivée seconde, dérivée d'ordre supérieur

Définition

Soit f une fonction dérivable sur I.
Si f' est dérivable sur I, on appelle dérivée seconde de f la dérivée de f'. On la note f'' ou $f^{(2)}$.

Remarque

On dfinit de même, sous réserve d'existence, la dérivée n^e $f^{(n)}$ de f.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x + 2$$

.
On a :

$$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 \qquad \textit{et} \qquad f'(x) = 24x + 10x.$$

Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable au voisinage de x_0.

1. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local (strict) en x_0.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local (strict) en x_0.*

Remarque

Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure et une analyse plus fine est nécessaire.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2)$.
On a $f'(x) = -2x\exp(-x^2)$ et $f''(x) = (4x^2-2)\exp(-x^2)$.
Puisque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f''(0) = -2 < 0$, f admet un maximum local en 0.

Convexité/concavité

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

1. *Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I.*
2. *Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I.*

Proposition

Si f est une fonction convexe ou concave sur I et admet un extremum en un point intérieur de I, celui-ci est global.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \exp(x^2 - 2x + 1)$.
On a $f(x) = 2(x-1)\exp(x^2 - 2x + 1)$ et $f(x) = (4x^2 - 8x + 6)\exp(x^2 - 2x + 1)$.
On vérifie que f est convexe sur $\mathbf{R}$ et admet un minimum en 1, et on conclue que celui-ci est global.

Meilleure approximation par un polynôme de degré n

Proposition

Soit f une fonction n fois dérivable au voisinage de x_0.
La meilleure approximation de f par un polynôme de degré n au voisinage de x_0 est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

où $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

Exemple

La meilleure approximation de exp au voisinage de 0 par un polynôme de degré 5 est donnée par :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Avertissement

Dans certains contextes, une notation s'impose plus naturellement que x pour la variable et on peut étudier une fonction f d'une variable s, t, y ou autre.

Lorsque l'on veut insister sur la variable par rapport à laquelle on dérive, disons s, on utilise la notation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} f(s)$$

au lieu de $f'(s)$ pour la dérivée de f en s.

Si aucune ambiguïté n'est possible, on utilise la notation habituelle $f'(s)$. Dans tous les cas, les aspects techniques restent inchangés :

il ne faut pas se laisser perturber !

Exemple

En économie, la conso. C d'un ménage est donnée par $C = C_0 + c(Y - T)$ avec :

- C_0 : la consommation incompressible,
- $c \in [0, 1]$: la propension marginale à consommer,
- Y : le revenu (Yield en anglais) du ménage,
- $T = tY$: le montant des taxes où $t \in [0, 1[$ désigne le taux d'imposition.

On peut voir la conso. du ménage comme une fonction C de son revenu Y :

$$C : Y \longmapsto C(Y) = C_0 + c(Y - T) = C_0 + c(Y - tY) = C_0 + c(1 - t)Y.$$

- variable : Y
- c, T et t sont des constantes

On a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,Y} C(Y) = C'(Y) = c(1 - t) \geq 0.$$

On en déduit que la consommation du ménage croit avec son revenu !

Coût total et coût marginal

- Coût total de fabrication de q unités : $CT(q)$ avec CT dérivable
- Coût marginal : $Cm(q) = CT'(q)$
- Le coût de production d'une unité supplémentaire est approché par le coût marginal

Exemple

Si $CT(q) = 10 + \sqrt{200q}$, produire 50 unités coûte alors

$$CT(50) = 110€.$$

Le coût (réel) de production de la 51^e unité est

$$\Delta CT = CT(51) - CT(50) \simeq 0,995€.$$

Il est (convenablement) approché par son coût marginal :

$$Cm(50) = CT'(50) = \frac{100}{\sqrt{200 \times 50}} = 1€.$$

Coût moyen et coût marginal

- coût moyen de production d'une unité lorsque l'on produit q unités :

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$$

On a donc que :

$$CM'(q) = \frac{CT'(q)q - CT(q)}{q^2}$$

est du signe de

$$CT'(q)q - CT(q)$$

ou encore de

$$CT'(q) - \frac{CT(q)}{q}$$

c'est-à-dire de

$$Cm(q) - CM(q).$$

Ainsi, le coût moyen est croissant aux points pour lesquels le coût marginal est supérieur au coût moyen et décroissant aux points pour lesquels le coût marginal est inférieur au coût moyen.

Coût moyen, coût marginal et optimum technique

- Optimum technique q^* : quantité à produire afin de minimiser le coût moyen de production (unitaire)

Lorsqu'il existe, il vérifie nécessairement :

$$CM'(q^*) = \frac{CT'(q^*)q^* - CT(q^*)}{(q^*)^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$Cm(q^*) = CM(q^*).$$

Graphiquement, les courbes représentatives des coûts moyen et marginal se coupe en l'optimum technique.

Coûts moyen et marginal, optimum technique (Exemple)

Si

$$CT(q) = \frac{q^3 - 2q^2 + 15200}{100}$$

on a

$$Cm(q) = CT'(q) = \frac{3q^2 - 4q}{100}$$

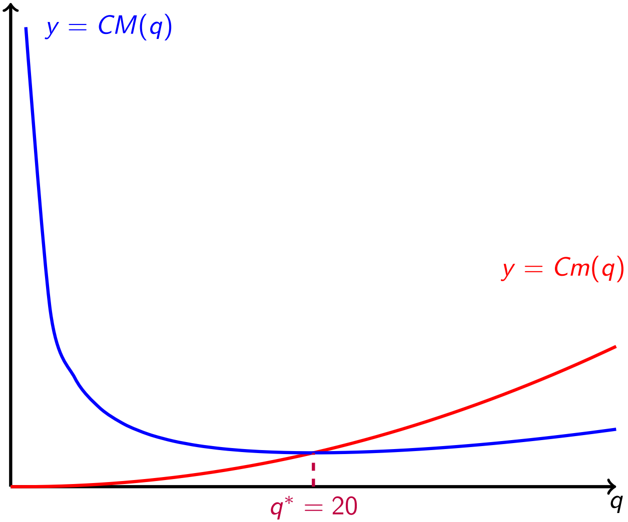
et

$$CM(q) = \frac{\frac{q^3-2q^2+15200}{100}}{q} = \frac{q^3 - 2q^2 + 15200}{100q}$$

Ainsi, $CM'(q)$ est du signe de

$$\begin{aligned} Cm(q) - CM(q) &= \frac{3q^2 - 4q}{100} - \frac{q^3 - 2q^2 + 15200}{100q} \\ &= \frac{2q^3 - 2q^2 - 15200}{100q} = \frac{2(q-20)(q^2+19q+380)}{100q} \\ &= \frac{(q-20)(q^2+19q+380)}{50q} \end{aligned}$$

Graphiquement



Elasticité (instantanée)

- Elasticité (instantanée) de f en x :

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}.$$

- Interprétation : si x augmente de $\varepsilon\%$, avec ε petit, $f(x)$ augmente approximativement de $(\mathcal{E}_f(x) \times \varepsilon)\,\%$.

Exemple

- *Demande d'un produit sur le marché soit donnée par*

$$D(x) = 100 - 4p \qquad (p \text{ prix de vente en } €)$$

- $D'(p) = -4$, *pour tout* p
- $\mathcal{E}_D(p) = -\frac{4p}{100-4p}$.
- *si* p *augmente de* $0,5\%$, *la demande baissera de* $\frac{2p}{100-4p}\%$.
- *En particulier, si le prix de vente initial* $p = 20€$ *augmente de* $0,5\%$, *la demande baissera de* 2%.

Elasticité revenu

- Demande : $D(Y, p)$ avec
  - Y : désigne le revenu (Yield) du consommateur
  - p : prix de vente du bien.

- élasticité revenu : élasticité de D vue comme une fonction de Y

$$\mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y) = \frac{Y D'(Y)}{D(Y)}.$$

- prix p fixé (constante)
- revenu Y : la variable

Typologie des biens (par l'élasticité revenu)

- revenu du consommateur Y_0 :
- bien inférieur : bien dont la consommation diminue lorsque le revenu augmente c'est-à-dire tel que :

$$\mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) < 0.$$

- bien normal : bien dont la consommation augmente lorsque le revenu augmente. c'est-à-dire tel que :

$$\mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) > 0.$$

Parmi les biens normaux, on peut distinguer :
  - bien de première nécessité : bien dont la consommation augmente, en pourcentage, moins que le revenu :

$$0 < \mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) < 1.$$

  - bien luxe : bien dont la consommation augmente, en pourcentage, plus que le revenu :

$$\mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) > 1.$$

Elasticité prix directe

- Demande : $D(Y, p)$ avec
  - Y : désigne le revenu (Yield) du consommateur
  - p : prix de vente du bien.

- élasticité prix directe : élasticité de D vue comme une fonction de p

$$\mathcal{E}_D^{\text{prix}}(p) = \frac{pD'(p)}{D(p)}.$$

- prix p : la variable
- revenu Y fixé (constante)

Typologie des biens (par l'élasticité prix directe)

- prix du bien : p_0
- bien ordinaire (ou normal) : un bien dont la consommation diminue lorsque son prix augmente c'est-à-dire tel que :

$$\mathcal{E}_D^{\text{prix}}(p_0) < 0.$$

- Pour compléter la classification des bien « anormaux », il faut s'intéresser à leur élasticité revenu :
  - bien de Veblen :

$$\mathcal{E}_D^{\text{prix}}(p_0) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) > 0;$$

  - bien de Giffen :

$$\mathcal{E}_D^{\text{prix}}(p_0) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_D^{\text{revenu}}(Y_0) < 0 \quad \text{(bien inférieur)}.$$

Continuité

Définition

On dit que la fonction f définie au voisinage de x_0 est continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur $I \subset \mathbf{R}$ si elle est continue en tout point de I.

Remarque

Intuitivement, dire que f est continue sur I revient à dire que l'on peut tracer le graphe de sa restriction à I « sans lever le crayon ».

Exemple

Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes et valeur absolue sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs. Les fonctions indicatrices ne sont pas continues sur $\mathbf{R}$. La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues sur leurs ensembles de définition.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue sur* $[a; b]$.

1. *Pour tout* γ *tel que* $f(a) < \gamma < f(b)$, *l'équation* $f(x) = \gamma$ *admet au moins une solution* c *dans l'intervalle* $[a; b]$.
   Si de plus, f *est strictement croissante sur* $[a; b]$, *cette solution est unique.*
2. *Pour tout* γ *tel que* $f(b) < \gamma < f(a)$, *l'équation* $f(x) = \gamma$ *admet au moins une solution* c *dans l'intervalle* $[a; b]$.
   Si de plus, f *est strictement décroissante sur* $[a; b]$, *cette solution est unique.*

Exercice

Vérifier que l'équation $\exp(2x + 1) = 2$ *admet une unique solution dans l'intervalle* $[-1; 3]$.

Définitions formelles ?

Voir le polycopier si vous le souhaitez, mais peuvent être omises !

On se contentera de retenir que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ s'approche de b quand x s'approche de a

Limites usuelles

Puissances entières et leurs inverses : Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{si } n \text{ est pair},$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{si } n \text{ est impair}.$$

Puissances arbitraires : Pour $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{-\alpha} = +\infty.$$

Exponentielles et logarithmes :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Opérations sur les limites (1/2)

$a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

- $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbf{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha l$
- $\alpha > 0$,$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \alpha f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)
- $\alpha < 0$,$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \alpha f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$,$\lim_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ $\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$ avec $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ et, pour $l \in \mathbf{R}$, $l + \infty = +\infty$ $l - \infty = -\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbf{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$
- $\lim_{x\to a} f(x) > 0$,$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) < 0$,$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbf{R}^* \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$
- $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Opérations sur les limites (2/2)

- $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, g est positive au voisinage de a (resp. négative au voisinage de a)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ (resp. $-\infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) < 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,g est positive au voisinage de a (resp. négative au voisinage de a) $\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ (resp. $+\infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $\lim_{x\to b} g(x) = l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = l$

Remarque

On peut observer que, par exemple, on ne peut pas déterminer la limite de $f + g$ lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$. On parle dans ce cas de forme indéterminée. D'autres formes indéterminées sont du type ≪ $\frac{0}{0}$ ≫, ≪ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ≫ ou ≪ $\pm\infty \times 0$ ≫.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle de base $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\exp_a(x) = \exp\left(x\ln(a)\right).$$

Puisque $\ln(a) < 0$ si $0 < a < 1$ et $\ln(a) > 0$ si $a > 1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(a) = -\infty \quad \text{si } 0 < a < 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(a) = +\infty \quad \text{si } a > 1.$$

Or, $\lim_{y\to-\infty}\exp(y) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty}\exp(y) = +\infty$. On en déduit, par composition, que :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln(a)\right) = 0 \quad \text{si } 0 < a < 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln(a)\right) = +\infty \quad \text{si } a > 1.$$

Comparaison de limites

Théorème

1. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
3. *Si* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *au voisinage de* a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \in \mathbf{R}$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Exemple

Rappelons que pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ *et donc :*

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, *le théormème précédant montre que :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

Croissances comparées

Proposition

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0.$$

Plus généralement, on a, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\alpha x)}{x^{\beta}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^{\beta}\exp(\alpha x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha}|\ln(x)|^{\beta} = 0.$$

Croissances comparées

Remarque

Informellement, il faut retenir que :

1. *quand x tend vers $+\infty$, $\exp(x)$ tend plus vite vers l'infini que n'importe quelle puissance positive de x et $\ln(x)$ tend moins vite vers l'infini que n'importe quelle puissance positive de x ;*
2. *quand x tend vers $-\infty$, $\exp(x)$ tend plus vite vers 0 que n'importe quelle puissance négative de x ;*
3. *quand x tend vers 0 par valeurs positives, $|\ln(x)|$ tend moins vite vers $+\infty$ que n'importe quelle puissance négative de x.*

Indéterminations du type « $+\infty - \infty$ »

Idée : factoriser l'expression par le terme ayant la croissance la plus rapide vers ∞

Exemple

Q° : $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) - x^3$ *?*
Terme dominant : $\exp(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right).$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} = 0$ *donc* $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x^3}{\exp(x)} = 1$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right) = +\infty.$$

Proposition

Soit $a_n \in \mathbf{R}^*$ *et* $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbf{R}$.
On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Indéterminations du type « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »

Idée : factoriser le numérateur et le dénominateur de l'expression par le terme ayant la croissance la plus rapide vers ∞

Exemple

Q° : $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-2x+7}{2x^2+5x-1}$?

Termes dominants :

- *au numérateur : $3x^3$*
- *au dénominateur : $2x^2$*

$$\frac{3x^3-2x+7}{2x^2+5x-1} = \frac{x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = x\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x+7}{2x^2+5x-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \times \lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} = -\infty\times\frac{3}{2} = -\infty.$$

Indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ » ou « $0 \times (\pm\infty)$ »

Idée : remarquer que ce type d'indéterminations est équivalent à celles du type « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » à un jeu d'écriture près : si la limite de $f \times g$ conduit à une indétermination du type

- « $0 \times \pm\infty$ », elle est la même que celle de $\frac{g}{(1/f)}$ qui est du type « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »
- « $\frac{0}{0}$ », elle est la même que celle de $\frac{1/g}{(1/f)}$ qui est du type « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ».

Exemple

Q° : $\lim_{x\to+\infty} \exp(-2x)\left(2x^5+5x^2-9\right)$ *lorsque x tend vers $+\infty$?*
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \exp(-2x)\left(2x^5+5x^2-9\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+5x^2-9}{\exp(2x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{\exp(2x)}\left(2+\frac{5}{x^3}-\frac{9}{x^5}\right) \\
&= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{\exp(2x)} = 0.
\end{aligned}$$