Chapitre 2: Indices simples et synthétiques

Arnaud Rousselle
arnaud.rousselle@iut-dijon.u-bourgogne.fr
http://arousselle.perso.math.cnrs.fr/

Année universitaire 2022-2023
Semestre 1

Contexte et objectifs

Les indices et taux de variation permettent de décrire l'évolution de grandeurs au cours du temps (prix, quantités, ...) et de comparer efficacement l'évolution de valeurs d'ordres de grandeur différents à des périodes contemporaines.

Indices simples et taux de variation

Définition

V_t et V_{t_0} : valeurs d'une grandeur numérique évoluant au cours du temps aux instants t et t_0

Indice simple de la grandeur au temps t en base 1 par rapport à (p.r.à) l'instant t_0 :

$$I_{t|t_0} = \frac{V_t}{V_{t_0}}.$$

Remarque

1. *Indices en base 100 p.r.à l'instant t_0 : $I_{t|t_0} = \frac{V_t}{V_{t_0}} \times 100$*
2. *Choix de considérer des indices en base 1 (ou 100%)*
   - $\rightsquigarrow$ *règles de calcul plus simples*
   - $\rightsquigarrow$ *adaptable à des indices en base arbitraire, mais formules plus lourdes*
3. *Si les grandeurs considérées sont des prix, ils doivent être exprimés en monnaie constante (d'une année) pour tenir compte de l'évolution de la valeur de l'argent dans le temps.*

Indices simples et taux de variation

Notations

p_t^A ou p_t : le prix d'un article A à la période t
q_t^A ou q_t : la quantité de l'article A consommée à la période t
$I_{t|t_0}^{p,A} = \dfrac{p_t}{p_{t_0}}$ *: indice de prix de l'article A au temps t en base 1 p.r.à l'instant t_0*
$I_{t|t_0}^{q,A} = \dfrac{q_t}{q_{t_0}}$ *: indice de quantité de l'article A au temps t en base 1 p.r.à l'instant t_0*

Remarque

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on les notera simplement $I_{t|t_0}^{p}$ et $I_{t|t_0}^{q}$

Exemple

Le nombre de baril de pétrole consommés en France par an et par habitant était de 11,9 en 2004 et de 10,2 en 2010, donc :

$$I_{2010|2004}^{q} = \frac{q_{2010}}{q_{2004}} = \frac{10,2}{11,9} \simeq 0,86 = 86\%.$$

Indices simples et taux de variation

Définition

Taux de variation de la grandeur du temps t_0 au temps t :

$$\tau_{t|t_0} = \frac{V_t - V_{t_0}}{V_{t_0}}$$

Proposition

On a, pour tous t, t_0 :

$$\tau_{t|t_0} = I_{t|t_0} - 1.$$

Exemple (suite)

Le taux de variation du nombre de barils de pétrole consommés par an et par habitant en France de l'année 2010 p.r.à 2004 est :

$$\tau_{2010|2004} = I^q_{2010|2004} - 1 \simeq -0,14 = -14\%.$$

La consommation de pétrole a baissé de 14% entre 2004 et 2010 en France.

Indices simples - règles de calcul

Identité

Pour tout t, on a :

$$I_{t|t} = 1 = 100\%.$$

Réversibilité

Pour tous t, t', on a :

$$I_{t'|t} = \frac{1}{I_{t|t'}}.$$

Circularité

Pour tous t, t', t'', on a :

$$I_{t''|t} = I_{t''|t'} I_{t'|t}.$$

Indices simples - règles de calcul

Exemple

Pour un certain produit, on donne $I^p_{2015|2000} = 1,12$ *et* $I^p_{2016|2000} = 1,2$.

But : Déterminer le taux de variation du prix de ce produit entre 2015 et 2016.

Circularité : $I^p_{2016|2015} = I^p_{2016|2000} I^p_{2000|2015}$

Réversibilité : $I^p_{2000|2015} = \dfrac{1}{I^p_{2015|2000}}$

Donc

$$I^p_{2016|2015} = I^p_{2016|2000} I^p_{2000|2015} = I^p_{2016|2000} \frac{1}{I^p_{2015|2000}}$$
$$= 1,2 \times \frac{1}{1,12} \simeq 1,074 = 107,4\%$$

et donc

$$\tau_{2016|2015} = I^p_{2016|2015} - 1 \simeq 0,074 = 7,4\%.$$

Produits et rapports de grandeur

Proposition

1. *Si* $V_t = a_t \times b_t$ *pour tout* t*, alors, pour tous* t, t' : $I^V_{t'|t} = I^a_{t'|t} I^b_{t'|t}$.
2. *Si* $V_t = \dfrac{a_t}{b_t}$ *pour tout* t*, alors, pour tous* t, t' : $I^V_{t'|t} = \dfrac{I^a_{t'|t}}{I^b_{t'|t}}$.

Preuve

1. *si pour tout* t, $V_t = a_t \times b_t$*, alors on a pour tous* t, t' :

$$I^V_{t'|t} = \frac{V_{t'}}{V_t} = \frac{a_{t'}}{a_t} \frac{b_{t'}}{b_t} = I^a_{t'|t} I^b_{t'|t};$$

2. *si pour tout* t, $V_t = \frac{a_t}{b_t}$*, alors on a pour tous* t, t' :

$$I^V_{t'|t} = \frac{V_{t'}}{V_t} = \frac{\frac{a_{t'}}{b_{t'}}}{\frac{a_t}{b_t}} = \frac{a_{t'} b_t}{a_t b_{t'}} = I^a_{t'|t} I^b_{t|t'} = \frac{I^a t'|t}{I^b_{t'|t}}.$$

Produits et rapports de grandeur

Exemple

Achat de 30*L* *de gazole à* *1,03€L*$^{-1}$ *en mars et de* 25*L* *à* *1,07€L*$^{-1}$ *en avril*
Budget mensuel consacré au gazole au cours du mois t : $b_t = p_t q_t$
avec p_t *le prix du litre de gazole le mois t et* q_t *la quantité consommée le mois t*
On a :

$$I^p_{avril|mars} = \frac{p_{avril}}{p_{mars}} = \frac{1,07}{1,03} \simeq 1,039 \quad et \quad I^q_{avril|mars} = \frac{q_{avril}}{q_{mars}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \simeq 0,833$$

donc

$$I^b_{avril|mars} = I^p_{avril|mars} I^q_{avril|mars} = \frac{1,07}{1,03}\frac{5}{6} \simeq 0,866.$$

donc

$$\tau^b_{avril|mars} = I^b_{avril|mars} - 1 \simeq -0,134$$

Le budget consacré au gazole a baissé de 13,4% *entre mars et avril.*

Indices synthétiques

- En pratique, on considère des paniers composés de plusieurs biens
- Objectif : résumer l'information en une seule grandeur synthétique
- On suppose que le panier est composé de n produits $A_1, \ldots, A_n$
  - $p_t^{A_k}$: le prix du produit A_k durant période t
  - resp. $q_t^{A_k}$: la quantité de A_k consommée durant période t.

Définition

Indice global d'un panier à la période t p.r.à la période t_0 (en base 1 en t_0) :

$$I_{t|t_0}^B = \frac{B_t}{B_{t_0}},$$

où, pour tout t, $B_t = p_t^{A_1} q_t^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_t^{A_n}$ est budget global consacré au panier durant la période t.

Indice global

Exemple

Légume	Carottes A_1	Haricots A_2	Choux A_3
$q_{2015}^{A_k}$ (en Kg)	10	7	6
$p_{2015}^{A_k}$ (en €)	2,10	3,20	2,50
$q_{2016}^{A_k}$ (en Kg)	8	10	7
$p_{2016}^{A_k}$ (en €)	2,90	2,80	2,70

Indice global de ce panier en 2016 p.r.à 2015 :

$$\begin{aligned} I_{2016|2015}^{B} &= \frac{p_{2016}^{A_1} q_{2016}^{A_1} + p_{2016}^{A_2} q_{2016}^{A_2} + p_{2016}^{A_3} q_{2016}^{A_3}}{p_{2015}^{A_1} q_{2015}^{A_1} + p_{2015}^{A_2} q_{2015}^{A_2} + p_{2015}^{A_3} q_{2015}^{A_3}} \\ &= \frac{2,90 \times 8 + 2,80 \times 10 + 2,70 \times 7}{2,10 \times 10 + 3,20 \times 7 + 2,50 \times 6} \\ &\simeq 1,2. \end{aligned}$$

Le budget consacré à ce panier a augmenté d'environ 20% entre 2015 et 2016.

Coefficients budgétaires

Définition

Coefficient budgétaire du produit A_k durant la période t :

$$b_t^{A_k} = \frac{p_t^{A_k} q_t^{A_k}}{\sum_{i=1}^{n} p_t^{A_i} q_t^{A_i}} = \frac{p_t^{A_k} q_t^{A_k}}{p_t^{A_1} q_t^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_t^{A_n}}.$$

Remarque

Le nombre $b_t^{A_k}$ représente la part du budget total $B_t = \sum_{i=1}^{n} p_t^{A_i} q_t^{A_i}$ de la période t consacrée au produit A_k.

Indices de Laspeyres

Indice de Laspeyres des prix de la période t p.r.à la période t_0

$$L^p_{t|t_0} = \frac{\sum_{k=0}^n p_t^{A_k} q_{t_0}^{A_k}}{\sum_{k=0}^n p_{t_0}^{A_k} q_{t_0}^{A_k}} = \frac{p_t^{A_1} q_{t_0}^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_{t_0}^{A_n}}{p_{t_0}^{A_1} q_{t_0}^{A_1} + \cdots + p_{t_0}^{A_n} q_{t_0}^{A_n}}.$$

Remarque

- *Indique combien de fois est plus cher à la période t le panier consommé à la période t_0.*
- *Utilisé par l'INSEE pour mesurer l'inflation ; il a le défaut de la surestimer.*

Proposition

$$L^p_{t|t_0} = \sum_{k=0}^n b_{t_0}^{A_k} I_{t|t_0}^{p,A_k}.$$

Indices de Laspeyres

Exemple (suite)

L'indice de Laspeyres des prix du panier de l'Exemple précédent en 2016 p.r.à 2015 est :

$$
\begin{aligned}
L^{p}_{2016|2015} &= \frac{p^{A_1}_{2016} q^{A_1}_{2015} + p^{A_2}_{2016} q^{A_2}_{2015} + p^{A_3}_{2016} q^{A_3}_{2015}}{p^{A_1}_{2015} q^{A_1}_{2015} + p^{A_2}_{2015} q^{A_2}_{2015} + p^{A_3}_{2015} q^{A_3}_{2015}} \\
&= \frac{2,90 \times 10 + 2,80 \times 7 + 2,70 \times 6}{2,10 \times 10 + 3,20 \times 7 + 2,50 \times 6} \\
&\simeq 1,11.
\end{aligned}
$$

Indices de Laspeyres

Indice de Laspeyres des quantités de la période t p.r.à la période t_0

$$L^q_{t|t_0} = \frac{\sum_{k=0}^n p^{A_k}_{t_0} q^{A_k}_t}{\sum_{k=0}^n p^{A_k}_{t_0} q^{A_k}_{t_0}} = \frac{p^{A_1}_{t_0} q^{A_1}_t + \cdots + p^{A_n}_{t_0} q^{A_n}_t}{p^{A_1}_{t_0} q^{A_1}_{t_0} + \cdots + p^{A_n}_{t_0} q^{A_n}_{t_0}}.$$

Remarque

- *Indique combien de fois serait plus cher le panier consommé de la période t par rapport à celui de la période t_0 si les prix étaient restés ceux de la période t_0 et seules les quantités consommées avait évolué.*

Proposition

$$L^q_{t|t_0} = \sum_{k=0}^n b^{A_k}_{t_0} I^{q,A_k}_{t|t_0}.$$

Indices de Laspeyres

Exemple (suite)

L'indice de Laspeyres des quantités du panier de l'Exemple précédent en 2016 p.r.à 2015 est :

$$
\begin{aligned}
L^{q}_{2016|2015} &= \frac{p^{A_1}_{2015} q^{A_1}_{2016} + p^{A_2}_{2015} q^{A_2}_{2016} + p^{A_3}_{2015} q^{A_3}_{2016}}{p^{A_1}_{2015} q^{A_1}_{2015} + p^{A_2}_{2015} q^{A_2}_{2015} + p^{A_3}_{2015} q^{A_3}_{2015}} \\
&= \frac{2,10 \times 8 + 3,20 \times 10 + 2,50 \times 7}{2,10 \times 10 + 3,20 \times 7 + 2,50 \times 6} \\
&\simeq 1,14.
\end{aligned}
$$

Indices de Paasche

Indice de Paasche des prix de la période t p.r.à la période t_0

$$P^p_{t|t_0} = \frac{\sum_{k=0}^n p_t^{A_k} q_t^{A_k}}{\sum_{k=0}^n p_{t_0}^{A_k} q_t^{A_k}} = \frac{p_t^{A_1} q_t^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_t^{A_n}}{p_{t_0}^{A_1} q_t^{A_1} + \cdots + p_{t_0}^{A_n} q_t^{A_n}}.$$

Remarque

- *Mesure de combien de fois est plus cher le panier de la période t qu'il n'aurait été avec les prix de la période t_0*
- *Tendance à sous-estimer l'inflation*

Proposition

On a

$$P^p_{t|t_0} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n b_t^{A_k} \frac{1}{I^{p,A_k}_{t|t_0}}} \qquad et \qquad P^p_{t|t_0} = \frac{1}{L^p_{t_0|t}}.$$

Indices de Paasche

Exemple (suite)

L'indice de Paasche des prix du panier de l'Exemple précédent en 2016 p.r.à 2015 est :

$$
\begin{aligned}
P^{p}_{2016|2015} &= \frac{p^{A_1}_{2016}q^{A_1}_{2016} + p^{A_2}_{2016}q^{A_2}_{2016} + p^{A_3}_{2016}q^{A_3}_{2016}}{p^{A_1}_{2015}q^{A_1}_{2016} + p^{A_2}_{2015}q^{A_2}_{2016} + p^{A_3}_{2015}q^{A_3}_{2016}} \\
&= \frac{2,90 \times 8 + 2,80 \times 10 + 2,70 \times 7}{2,10 \times 8 + 3,20 \times 10 + 2,50 \times 7} \\
&\simeq 1,06.
\end{aligned}
$$

Indices de Paasche

Indice de Paasche des quantités de la période t p.r.à la période t_0

$$P^q_{t|t_0} = \frac{\sum_{k=0}^n p_t^{A_k} q_t^{A_k}}{\sum_{k=0}^n p_t^{A_k} q_{t_0}^{A_k}} = \frac{p_t^{A_1} q_t^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_t^{A_n}}{p_t^{A_1} q_{t_0}^{A_1} + \cdots + p_t^{A_n} q_{t_0}^{A_n}}.$$

Remarque

- *Mesure de combien de fois est plus cher le panier de la période t que ne l'aurait été celui de la période t_0 avec les prix de la période t*

Proposition

On a

$$P^q_{t|t_0} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n b_t^{A_k} \frac{1}{I^{q,A_k}_{t|t_0}}} \qquad et \qquad P^q_{t|t_0} = \frac{1}{L^q_{t_0|t}}.$$

Indices de Fisher

Indice de Fisher des prix (resp. des quantités) de la période t p.r.à la période t_0

$$F^p_{t|t_0} = \sqrt{P^p_{t|t_0} L^p_{t|t_0}} \quad \text{(resp. } F^q_{t|t_0} = \sqrt{P^q_{t|t_0} L^q_{t|t_0}}\text{)}.$$

Remarque

- *Moyenne géométrique des indices de Paasche et Laspeyres*
- *Compris entre ces deux-ci et donne une mesure plus centrale de l'inflation*
- *Utilisé au Canada pour estimer l'évolution du PIB*

Conversion monnaie constante/monnaie courante

- La valeur d'une monnaie varie au cours du temps et les prix des produits sont exprimés en monnaie courante.
- Par exemple, le prix moyen d'une baguette de pain était, en France de :
  - 0,64€ en 2000, exprimé en euros de l'an 2000 ($€_{2000}$),
  - 0,87€ en 2014, exprimé en euros de l'an 2014 ($€_{2014}$).
- Objectif : exprimer les prix en monnaie d'une année fixée pour les comparer.

Relation liant une monnaie M aux temps t et t'

$$1M_{t'} = I_{t|t'} M_t,$$

où $I_{t|t'}$ est un indice synthétique de prix en base 1 en t' de la zone où la monnaie M est en vigueur

$\rightsquigarrow$ permet de prendre en compte l'inflation

Conversion monnaie constante/monnaie courante

Exemple

Un indice synthétique de la zone euro en 2014 en base 1 en 2000 est :

$$I_{2014|2000} = 1,25.$$

Ainsi, 1€ de 2000 permettait d'acheter la même chose que 1,25€ de 2014.

Exprimons le prix moyen d'une baguette en 2000 en euros de 2014 :

$$0,64€_{2000} = I_{2014|2000} 0,64€_{2014} = 1,25 \times 0,64€_{2014} = 0,80€_{2014}.$$

En tenant compte de l'inflation, le prix moyen d'une baguette de pain a donc augmenté de $\tau_{2014|2000}^{baguette} = \frac{0{,}87-0{,}80}{0{,}80} = 8,75\%$ *entre 2000 et 2014.*